2

Εξισώσεις - Ανισώσεις

2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αφού διατάξετε τους αριθμούς 0, 8, –2, 4, –5, τότε:

1. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς προσθέσετε τον αριθμό 3
2. Να διατάξετε και τους αριθμούς που προκύπτουν, αν
   - i) αφαιρέσετε τον αριθμό 3
   - ii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό 2
   - iii) πολλαπλασιάσετε με τον αριθμό –2

Σε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις η φορά των ανισοτήτων διατηρείται και σε ποια αλλάζει;

2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει και η **μεταβατική ιδιότητα**:

Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$

Αν **α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί** με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

$\alpha^2 \geq 0$

Επομένως:

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε λανθασμένο συμπέρασμα.

Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ή διαιρέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες $\begin{cases} 6 > 4 \\ 3 > 1 \end{cases}$, τότε καταλήγουμε στις ανισότητες $3 > 3$ ή $2 > 4$, που δεν ισχύουν.

Ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούνται και για την επίλυση ανισώσεων.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να επιλύσουμε την ανίσωση $x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$, που είναι πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. (Στο παράδειγμα έχουμε Ε.Κ.Π. $= 4 > 0$, οπότε η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει, *ιδιότητα β*).	$x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$ $4 \cdot x - 4 \cdot \frac{3x+1}{2} > 4 \cdot \frac{3}{4}$
Απαλείφουμε τους παρονομαστές.	$4x - 2(3x + 1) > 3$
Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις.	$4x - 6x - 2 > 3$
Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, *ιδιότητα α*).	$4x - 6x > 3 + 2$
Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.	$-2x > 5$
Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου. (Στο παράδειγμα ο συντελεστής είναι $-2 < 0$ και γι' αυτό αλλάζει η φορά της ανίσωσης, *ιδιότητα γ*).	$\frac{-2x}{-2} < \frac{5}{-2}$ $x < -\frac{5}{2}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $α < 6$, τότε $α - 6 < 0$. ☐

β) Αν $α > β$, τότε $-α < -β$. ☐

γ) Αν $α < 0$, τότε $-α > 0$. ☐

δ) Αν $-3x > -12$, τότε $x > 4$. ☐

ε) Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$, τότε $x > y$. ☐

στ) Αν $x > 0$, τότε $x + 5 > 0$. ☐

ζ) Αν $α > 6$ και $β > -4$, τότε $α + β > 2$. ☐

η) Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $xy > 6$. ☐

2 Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) Αν $α > 3$, τότε $α - 3 \ldots 0$

β) Αν $α < β$ και $β < γ$, τότε $α \ldots γ$

γ) Αν $α > 0$ και $β < 0$, τότε $\frac{α}{β} \ldots 0$

δ) Αν $γ < 0$ και $αγ \leq βγ$, τότε $α \ldots β$

ε) Αν $α \neq 0$, τότε $α^2 \ldots 0$

στ) Αν $α \leq 0$ και $β \leq 0$, τότε $α + β \ldots 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν $α < 6$, τότε $α - 6 < 0$.

β) Αν $α > β$, τότε $-α < -β$.

γ) Αν $α < 0$, τότε $-α > 0$.

δ) Αν $-3x > -12$, τότε $x > 4$.

ε) Αν $\frac{x}{-4} > \frac{y}{-4}$, τότε $x > y$.

στ) Αν $x > 0$, τότε $x + 5 > 0$.

ζ) Αν $α > 6$ και $β > -4$, τότε $α + β > 2$.

η) Αν $x > 2$ και $y > 3$, τότε $xy > 6$.

2 Να συμπληρώσετε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) Αν $α > 3$, τότε $α - 3$ ... 0

β) Αν $α < β$ και $β < γ$, τότε $α$ ... $γ$

γ) Αν $α > 0$ και $β < 0$, τότε $\frac{α}{β}$ ... 0

δ) Αν $γ < 0$ και $αγ \leq βγ$, τότε $α$ ... $β$

ε) Αν $α \neq 0$, τότε $α^2$ ... 0

στ) Αν $α \leq 0$ και $β \leq 0$, τότε $α + β$ ... 0

1. Σ – Σ – Σ – Λ – Λ– Σ – Σ – Σ
2 α) $>$, β) $<$, γ) $<$, δ) $\geq$, ε) $>$, στ) $\leq$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3 Ποιες ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούμε, ώστε από την ανίσωση $3x - 4 < 7$ να γράψουμε $3x < 7 + 4$ και από την ανίσωση $3x < 11$ να γράψουμε $x < \frac{11}{3}$;

4 Με ποιες ιδιότητες της διάταξης από την ανισότητα $x > 3$ προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες;

α) $x + 4 > 7$ β) $x - 2 > 1$ γ) $5x > 15$ δ) $-6x < -18$

5 Αν $α > 12$ και $β > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης;

α) $α + β > 15$ β) $α - β > 9$ γ) $αβ > 36$ δ) $\frac{α}{β} > 4$

6 Ένας μαθητής γνωρίζει ότι για να είναι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, αρκεί να ισχύει $αδ = βγ$. Βασιζόμενος σ' αυτό σκέφτηκε ότι για να ισχύει $\frac{α}{β} > \frac{γ}{δ}$, αρκεί να αποδείξει ότι $αδ > βγ$. Η σκέψη που έκανε είναι σωστή;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3 Ποιες ιδιότητες της διάταξης χρησιμοποιούμε, ώστε από την ανίσωση $3x - 4 < 7$ να γράψουμε $3x < 7 + 4$ και από την ανίσωση $3x < 11$ να γράψουμε $x < \frac{11}{3}$;

4 Με ποιες ιδιότητες της διάταξης από την ανισότητα $x > 3$ προκύπτουν οι παρακάτω ανισότητες;
α) $x + 4 > 7$ β) $x - 2 > 1$ γ) $5x > 15$ δ) $-6x < -18$

5 Αν $α > 12$ και $β > 3$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες προκύπτουν από τις ιδιότητες της διάταξης;
α) $α + β > 15$ β) $α - β > 9$ γ) $αβ > 36$ δ) $\frac{α}{β} > 4$

6 Ένας μαθητής γνωρίζει ότι για να είναι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, αρκεί να ισχύει $αδ = βγ$. Βασιζόμενος σ' αυτό σκέφτηκε ότι για να ισχύει $\frac{α}{β} > \frac{γ}{δ}$, αρκεί να αποδείξει ότι $αδ > βγ$. Η σκέψη που έκανε είναι σωστή;

3. Προσθέτουμε το 4 και στα δύο μέλη – Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 3.
4. α) Προσθέτουμε το 4 και στα δύο μέλη.
   β) Αφαιρούμε το 2 και από τα δύο μέλη.
   γ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 5.
   δ) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το –6.
5. Οι ανισότητες α), γ).
6. Όχι, γιατί πρέπει οι β, δ να είναι ομόσημοι. (να δοθούν αριθμητικά παραδείγματα)