



Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

3



3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού x προσθέσουμε έναν αριθμό y , βρίσκουμε άθροισμα 6.

- α) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x και y .
- β) Ποια από τα ζεύγη $(-1, 8)$, $(0, 6)$, $(-2, 7)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$, $(3, 5)$ επαληθεύουν την προηγούμενη σχέση;
- γ) Σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία όσα από τα προηγούμενα ζεύγη επαληθεύουν τη σχέση. Με τη βοήθεια ενός χάρακα να εξετάσετε αν όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία ε .
- δ) Πάνω στην ευθεία ε να πάρετε ένα οποιοδήποτε σημείο M και να εξετάσετε αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη σχέση.

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$

Διερεύνηση με [μικροπείραμα](#)

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση με δύο αγνώστους x , y και η οποία είναι της μορφής $ax + by = \gamma$.

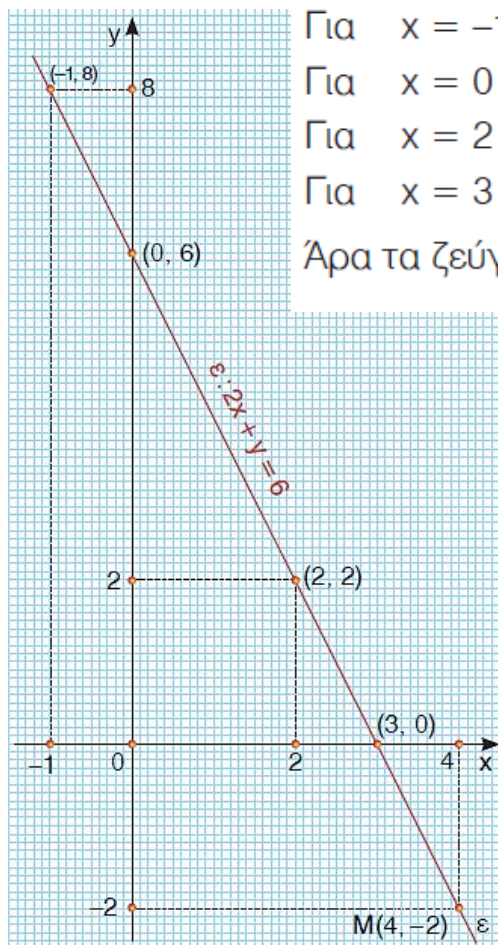
Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x + y = 6$ είναι της μορφής αυτής, με $a = 2$, $b = 1$ και $\gamma = 6$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ και $y = 4$ η εξίσωση $2x + y = 6$ επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 1 + 4 = 6$, ενώ για $x = 3$ και $y = 5$ δεν επαληθεύεται, αφού $2 \cdot 3 + 5 = 11 \neq 6$.

Το ζεύγος των αριθμών $(1, 4)$ που επαληθεύει την εξίσωση $2x + y = 6$, λέμε ότι είναι μία λύση της.

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

Λύση μιας εξίσωσης $ax + by = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.



Για $x = -1$ έχουμε $2 \cdot (-1) + y = 6$, οπότε $y = 8$.

Για $x = 0$ έχουμε $2 \cdot 0 + y = 6$, οπότε $y = 6$.

Για $x = 2$ έχουμε $2 \cdot 2 + y = 6$, οπότε $y = 2$.

Για $x = 3$ έχουμε $2 \cdot 3 + y = 6$, οπότε $y = 0$ κ.τ.λ.

Άρα τα ζεύγη $(-1, 8), (0, 6), (2, 2), (3, 0), \dots$ είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + y = 6$.

x	-1	0	2	3
y	8	6	2	0

- Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.



3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

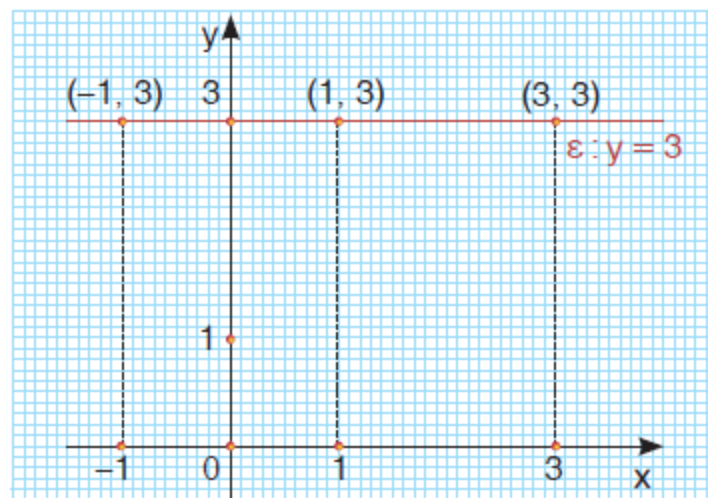
Η εξίσωση $y = k$.

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $0x + 2y = 6$, που είναι της μορφής $ax + by = \gamma$ με $a = 0$, τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του x έχουμε $y = 3$.

Για παράδειγμα, τα ζεύγη $(-1, 3)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$, κ.τ.λ. είναι λύσεις της.

Επομένως, η εξίσωση $0x + 2y = 6$ παριστάνει μια ευθεία ε της οποίας όλα τα σημεία έχουν την ίδια τεταγμένη $y = 3$ και τετμημένη οποιονδήποτε αριθμό.

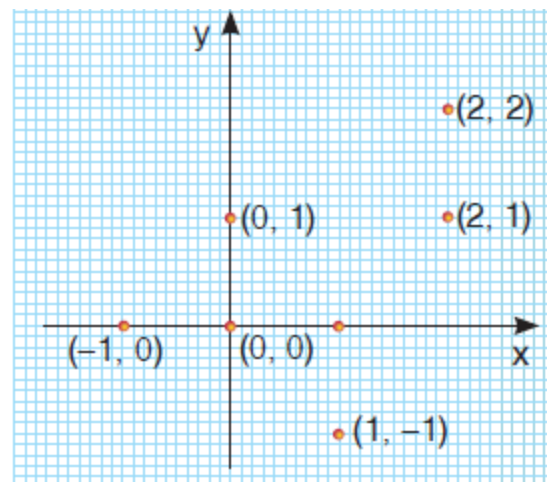
Άρα η ε είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = 3$.



Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, k)$, ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

Η εξίσωση $0x + 0y = 0$ επαληθεύεται για κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) . Για παράδειγμα, τα ζεύγη $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, κ.τ.λ. είναι λύσεις της (αόριστη εξίσωση). Τα σημεία όμως, που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα η εξίσωση $0x + 0y = 0$ δεν παριστάνει ευθεία, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ και παριστάνει ευθεία όταν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα ζεύγη $(3, 2)$, $(1, 5)$, $(0, 6)$, $(-3, 10)$, $(-2, 8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $4x + 3y = 18$;

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) , αν είναι σωτές ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες.

α) Το σημείο $(3, -2)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 3x - y = 7$.

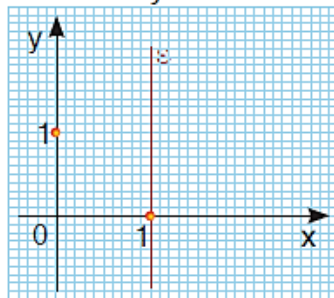
β) Η ευθεία $\varepsilon : 5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$.

γ) Η ευθεία $\varepsilon : 2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Η ευθεία $\varepsilon : 3x + y = 6$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$.

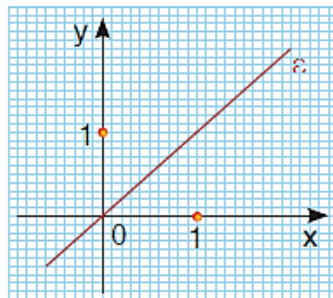
3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ε των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις:

1. $y = 1$



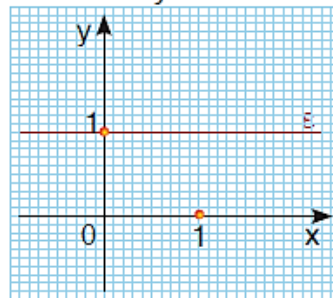
(σχήμα α)

2. $x = -1$



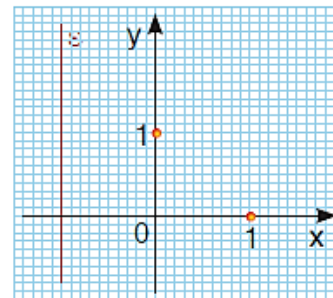
(σχήμα β)

3. $y = x$



(σχήμα γ)

4. $x = 1$



(σχήμα δ)

α	β	γ	δ



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποια από τα ζεύγη $(3, 2)$, $(1, 5)$, $(0, 6)$, $(-3, 10)$, $(-2, 8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $4x + 3y = 18$;

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωτές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Το σημείο $(3, -2)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 3x - y = 7$.

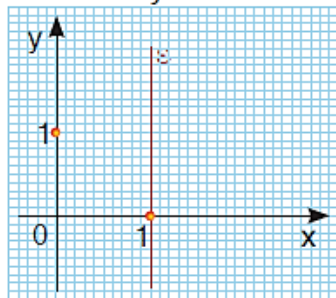
β) Η ευθεία $\varepsilon : 5x + y = -10$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$.

γ) Η ευθεία $\varepsilon : 2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Η ευθεία $\varepsilon : 3x + y = 6$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$.

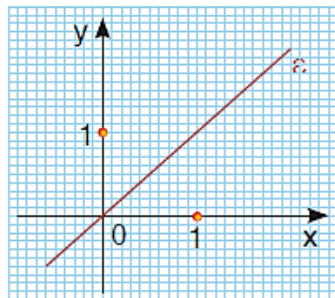
3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ευθεία ε των παρακάτω σχημάτων μία από τις εξισώσεις:

1. $y = 1$



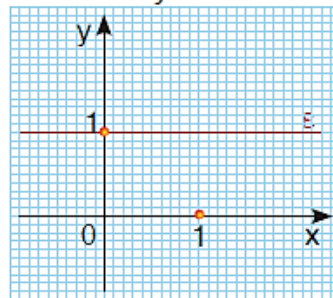
(σχήμα α)

2. $x = -1$



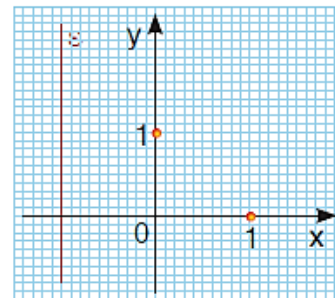
(σχήμα β)

3. $y = x$



(σχήμα γ)

4. $x = 1$



(σχήμα δ)

α	β	γ	δ

1. $(3, 2)$, $(0, 6)$, $(-3, 10)$

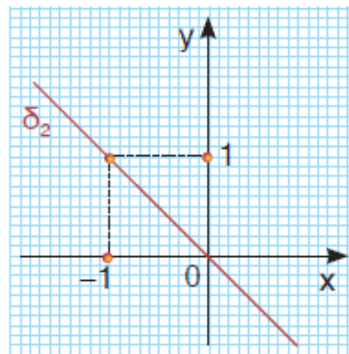
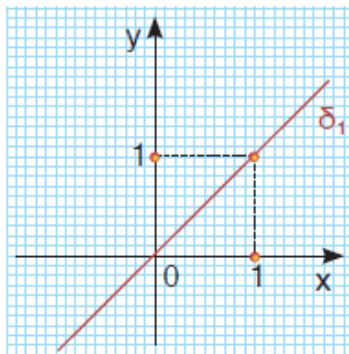
2. Λ - Σ - Σ - Λ

3. α → 4, β → 3, γ → 1, δ → 2



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4 Οι ευθείες δ_1 , δ_2 διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



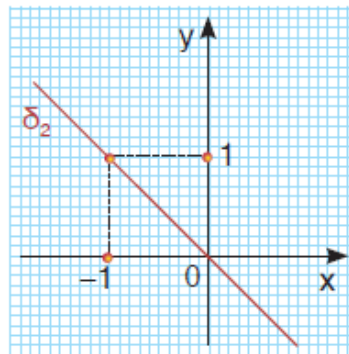
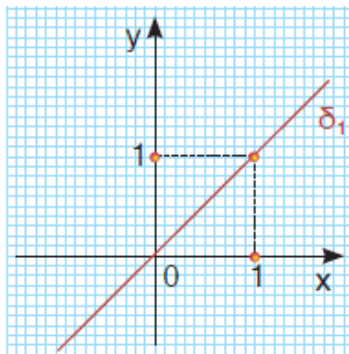
- i) Η εξίσωση της δ_1 είναι: α) $x = 1$ β) $y = 1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$
 ii) Η εξίσωση της δ_2 είναι: α) $x = -1$ β) $y = -1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

5 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, -3)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση:
 α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -3$ δ) $y = -3$ ε) $4x - 3y = 0$
 ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, -2)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση:
 α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -2$ δ) $y = -2$ ε) $4x - 2y = 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 4 Οι ευθείες δ_1 , δ_2 διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.



- i) Η εξίσωση της δ_1 είναι: α) $x = 1$ β) $y = 1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$
 ii) Η εξίσωση της δ_2 είναι: α) $x = -1$ β) $y = -1$ γ) $y = x$ δ) $y = -x$

- 5 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- i) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, -3)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση:
 α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -3$ δ) $y = -3$ ε) $4x - 3y = 0$
 ii) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(4, -2)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση:
 α) $y = 4$ β) $x = 4$ γ) $x = -2$ δ) $y = -2$ ε) $4x - 2y = 0$

4. i) γ, ii) δ

5. i) δ, ii) β



3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε ένα σύστημα αξόνων και να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + y = 8$.
2. Να βρείτε το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου τομής τους και να εξετάσετε αν είναι λύση και των δύο εξισώσεων.

Παρατηρούμε ότι το ζεύγος των αριθμών $(3, 2)$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του

$$\text{γραμμικού συστήματος } \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}, \text{ αφού } \begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 2 \cdot 3 + 2 = 8 \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ζεύγος $(3, 2)$ είναι λύση του συστήματος.

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.



3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

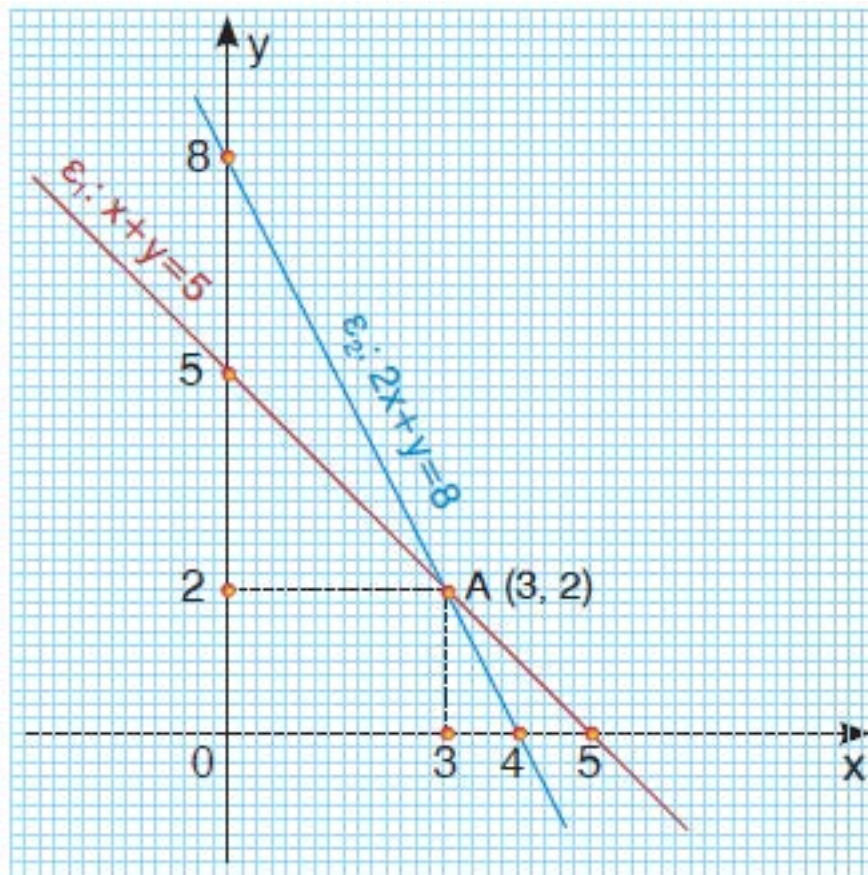
Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y = 5$ και

$$\varepsilon_2 : 2x + y = 8,$$

οι οποίες όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα τέμνονται στο σημείο A. Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες (3, 2) του κοινού σημείου A των ευθειών αυτών.

Επειδή το σημείο A(3, 2) ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του $x = 3$ και $y = 2$ επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, άρα το ζεύγος (3, 2) είναι λύση του συστήματος. Οι ευθείες όμως ε_1 , ε_2 δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε και το σύστημα δεν έχει άλλη λύση. Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος (3, 2) είναι η μοναδική λύση του συστήματος.



3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους

Αδύνατο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$$

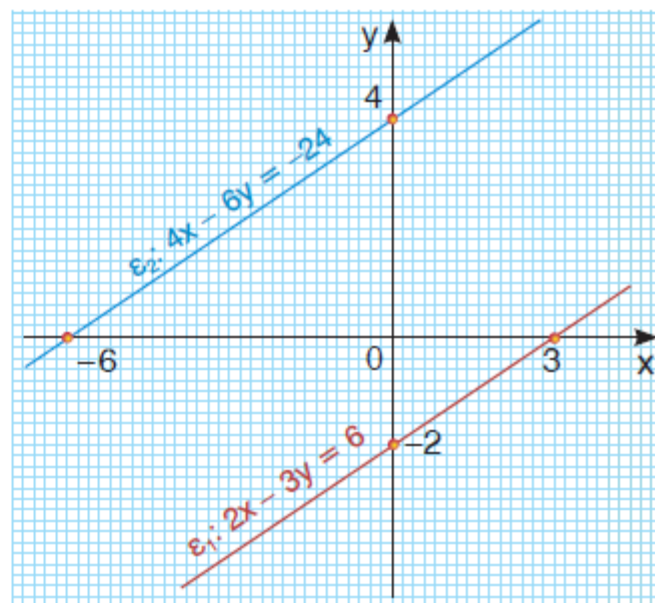
σχεδιάζουμε τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : 2x - 3y = 6 \text{ και}$$

$$\varepsilon_2 : 4x - 6y = -24,$$

οι οποίες όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα είναι **παράλληλες**. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα **δεν έχει λύση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους

Αόριστο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

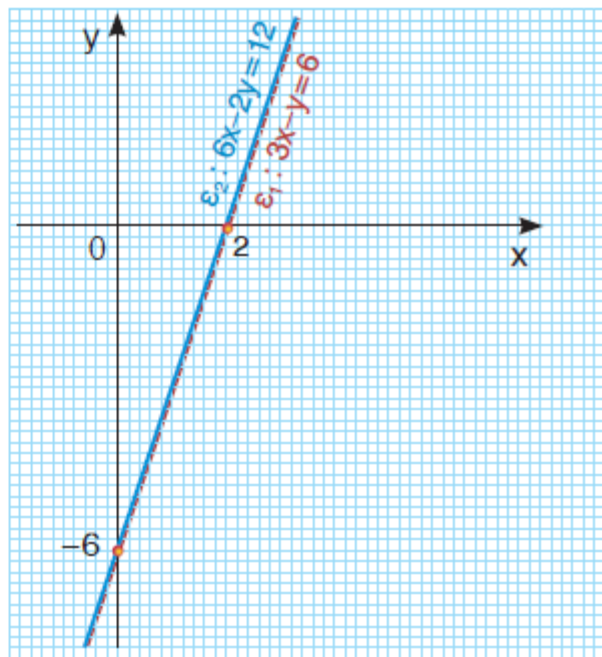
$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : 3x - y = 6 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2 : 6x - 2y = 12,$$

οι οποίες, όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα, συμπίπτουν (ταυτίζονται). Άρα έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγμένες του σημείου:

- α) A(-3, 2) β) B(1, -1) γ) Γ(1, -4) δ) Δ(2, -3)

2 Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες ε_1 και ε_2 , να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης A, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
α. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται.	1. Το σύστημα είναι αόριστο.
β. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.	2. Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συμπίπτουν.	3. Το σύστημα είναι αδύνατο.

α	β	γ





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το σύστημα $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ έχει ως λύση τις συντεταγμένες του σημείου:

- α) A(-3, 2) β) B(1, -1) γ) Γ(1, -4) δ) Δ(2, -3)

2 Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται με τις ευθείες ε_1 και ε_2 , να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης A, το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
α. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται.	1. Το σύστημα είναι αόριστο.
β. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.	2. Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.
γ. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συμπίπτουν.	3. Το σύστημα είναι αδύνατο.

α	β	γ



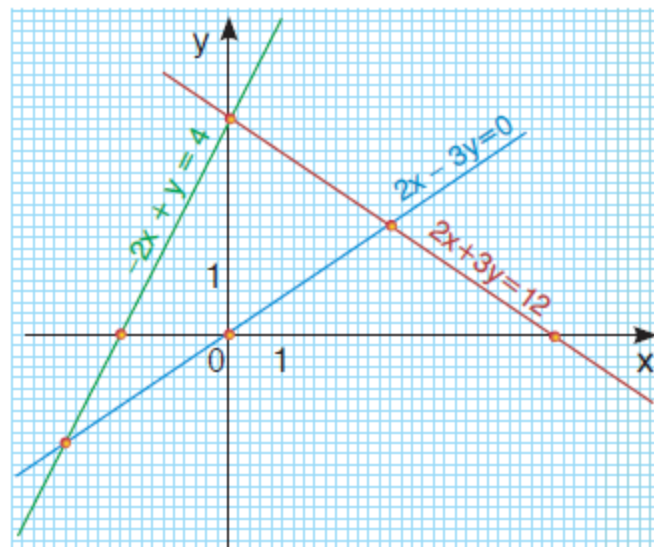


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3 Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα.

α) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$



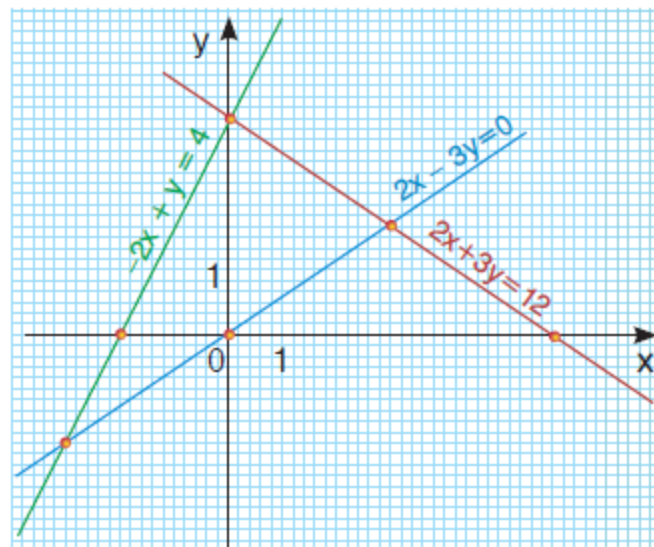


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

3 Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να βρείτε τη λύση σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα.

α) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$



3.3

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατά τη διάρκεια ενός ποδοσφαιρικού πρωταθλήματος, από τους 30 αγώνες που έδωσε μια ομάδα ηττήθηκε στους 10, ενώ στους υπόλοιπους κέρδισε ή έφερε ισοπαλία. Για κάθε νίκη της πήρε 3 βαθμούς, για κάθε ισοπαλία πήρε 1 βαθμό και για κάθε ήττα δεν πήρε βαθμό. Αν τελικά συγκέντρωσε 44 βαθμούς, πόσες φορές νίκησε και πόσες έφερε ισοπαλία;

Συμβολίζουμε με x τις φορές που έφερε ισοπαλία
και με y τις φορές που νίκησε

και καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$x + y = 20$$

$$x + 3y = 44$$



3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να επιλύσουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης

εργαζόμαστε ως εξής:

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Λύνουμε την εξίσωση $x + y = 20$ ως προς x και έχουμε $x = 20 - y$

Αντικαθιστούμε το x με $20 - y$ στην εξίσωση $x + 3y = 44$ και έχουμε:

$$(20 - y) + 3y = 44$$

$$20 + 2y = 44$$

$$2y = 44 - 20$$

$$2y = 24 \text{ άρα } y = 12$$

Για $y = 12$ από την εξίσωση $x = 20 - y$ έχουμε:

$$x = 20 - 12$$

$$x = 8$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 8, y = 12$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (8, 12)$



3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Αν στις δύο εξισώσεις, οι συντελεστές ενός αγνώστου είναι αντίθετοι αριθμοί, τότε μπορούμε να λύσουμε το σύστημα πιο γρήγορα, αν προσθέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του.

Για παράδειγμα, στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ οι συντελεστές του y είναι αντίθετοι αριθμοί

και αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, τότε ο άγνωστος y απαλείφεται.

Έτσι έχουμε:

$$3x + 5x = 12 + 4 \quad \text{ή} \quad 8x = 16, \text{ οπότε } x = 2.$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή του x σε μια από τις δύο εξισώσεις, π.χ. στην πρώτη, τότε έχουμε:

$$3 \cdot 2 + 2y = 12 \quad \text{ή} \quad 2y = 6 \quad \text{ή} \quad y = 3.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2, y = 3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$.



3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Όταν όμως έχουμε να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$

στο οποίο δεν υπάρχουν αντίθετοι συντελεστές στον ίδιο άγνωστο τότε:

• Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

Για να απαλείψουμε τον άγνωστο x , πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το -2 και της δεύτερης με το 3 , οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 3 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases}$$

• Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

$$\begin{array}{r} -6x - 10y + 6x + 21y = -2 + 24 \\ 11y = 22, \text{ οπότε } y = 2 \end{array}$$

• Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.

Αφού $y = 2$, η εξίσωση $3x + 5y = 1$ γράφεται:

$$\begin{array}{l} 3x + 5 \cdot 2 = 17 \quad \text{ή} \quad 3x + 10 = 1 \\ 3x = -9 \quad \text{ή} \quad x = -3 \end{array}$$

• Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = -3, y = 2$, δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (-3, 2)$





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$
- α) (2, 4) β) (7, -1) γ) (6, 2) δ) (5, 1)

- 2 Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:
- α) την πρώτη εξίσωση ως προς x; β) την πρώτη εξίσωση ως προς y;
 γ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς x; δ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς y;

- 3 Αν στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών ποια από τις παρακάτω εξισώσεις προκύπτει;
- α) $3x = -1$ β) $2x = -9$ γ) $5x = -10$ δ) $5x = 10$





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$
- α) (2, 4) β) (7, -1) γ) (6, 2) δ) (5, 1)

- 2 Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:
- α) την πρώτη εξίσωση ως προς x; β) την πρώτη εξίσωση ως προς y;
 γ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς x; δ) τη δεύτερη εξίσωση ως προς y;

- 3 Αν στο σύστημα $\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών ποια από τις παρακάτω εξισώσεις προκύπτει;
- α) $3x = -1$ β) $2x = -9$ γ) $5x = -10$ δ) $5x = 10$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 4 Με ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y σε κάθε σύστημα;

$$\begin{cases} 5x + 4y = 9 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases} \quad \dots$$

- 5 Με ποια μέθοδο είναι προτιμότερο να λύσουμε καθένα από τα παρακάτω συστήματα;

$$\alpha) \begin{cases} 7x + 4y = 8 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 5x - 5y = 18 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 8 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

- 6 Σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$$(\Sigma_1): \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad (\Sigma_2): \begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ -5x + 7y = 4 \end{cases}$$

αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, τότε απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για καθένα από τα συστήματα;



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 4 Με ποιους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης για να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές στον άγνωστο y σε κάθε σύστημα;

$$\begin{cases} 5x + 4y = 9 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases} \quad \dots$$

- 5 Με ποια μέθοδο είναι προτιμότερο να λύσουμε καθένα από τα παρακάτω συστήματα;

$$\alpha) \begin{cases} 7x + 4y = 8 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 5x - 5y = 18 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 8 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

- 6 Σε καθένα από τα παρακάτω συστήματα

$$(\Sigma_1): \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad (\Sigma_2): \begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ -5x + 7y = 4 \end{cases}$$

αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, τότε απαλείφονται και οι δύο άγνωστοι. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για καθένα από τα συστήματα;

4. Με 1, -2, τις εξισώσεις του 1ου συστήματος και με 5, 3 τις εξισώσεις του 2ου συστήματος.
 5. α, γ με αντικατάσταση, β με αντίθετους συντελεστές, δ υποκειμενικό (ουσιαστικά δηλαδή, δεχόμαστε και τις δύο απαντήσεις εκ μέρους των μαθητών).
 6. (Σ₁) αδύνατο (Σ₂) αόριστο.

