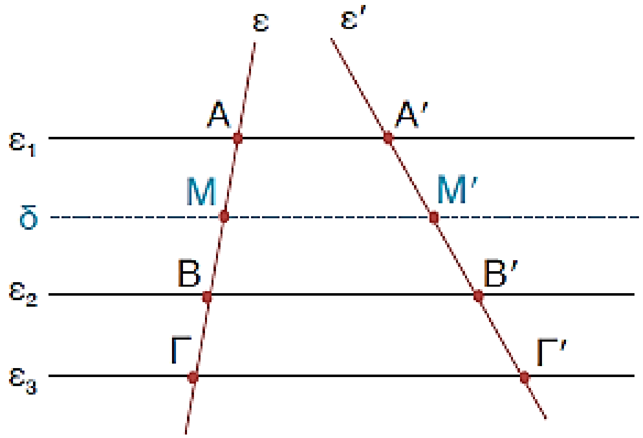
1

Θεώρημα του Θαλή

1.3 Θεώρημα του Θαλή



Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες ε1, ε2, ε3 που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε **ΑΒ = 2·ΒΓ.**

Αν μια άλλη ευθεία ε΄ τέμνει τις ε1, ε2, ε3 στα σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ αντιστοίχως, τότε **θα αποδείξουμε ότι** και για τα ευθύγραμμα τμήματα Α΄Β΄, Β΄Γ΄ ισχύει μια ανάλογη σχέση. Δηλαδή **Α΄Β΄ = 2·Β΄Γ΄.**

Αν από το **μέσο Μ** του ΑΒ φέρουμε την ευθεία δ παράλληλη προς τις ευθείες ε1, ε2, ε3, τότε οι παράλληλες ευθείες ε1, δ, ε2, ε3 ορίζουν στην ευθεία ε ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ευθεία ε΄.
Δηλαδή ισχύει **Α΄Μ΄ = Μ΄Β΄ = Β΄Γ΄** και επομένως **Α΄Β΄ = 2·Β΄Γ΄.**

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, αν $AB = 2 \cdot B\Gamma$ θα ισχύει και $A'B' = 2 \cdot B'\Gamma'$, οπότε:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{2 \cdot B\Gamma}{2 \cdot B'\Gamma'} \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

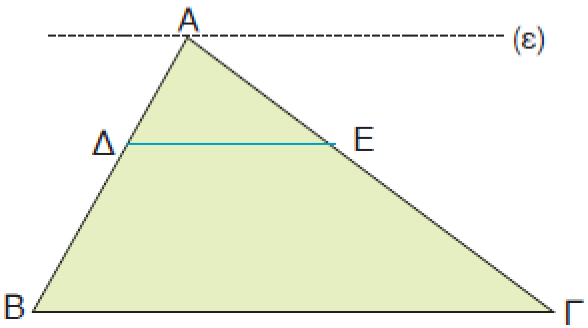
$$\text{αν} \quad \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \quad \text{τότε} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Η προηγούμενη πρόταση είναι γνωστή ως θεώρημα του Θαλή.

1.3 Θεώρημα του Θαλή

Για παράδειγμα, σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν ΔΕ // ΒΓ και από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ευθείες ε, ΔΕ, ΒΓ θα ορίζουν στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή, $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$, οπότε και $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.



Αποδεικνύεται ακόμη ότι, αν ισχύει $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$, τότε ΔΕ // ΒΓ.

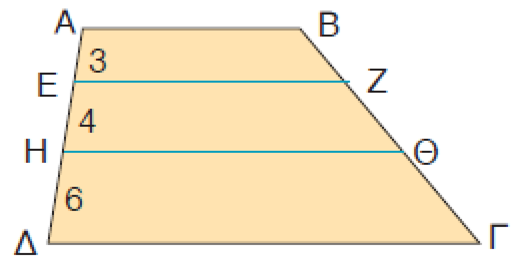
Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- Αν ΔΕ // ΒΓ τότε $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.
- Αν $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ τότε ΔΕ // ΒΓ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν ΑΒ, ΕΖ, ΗΘ, ΔΓ είναι παράλληλες, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

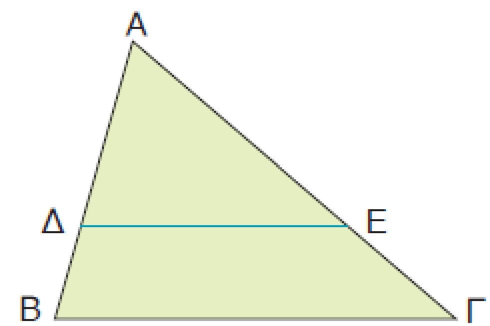
α) $\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΘΓ}} = \underline{\qquad}$ β) $\frac{\text{ΖΘ}}{\text{ΖΓ}} = \underline{\qquad}$ γ) $\frac{\text{ΒΘ}}{\text{ΒΓ}} = \underline{\qquad}$



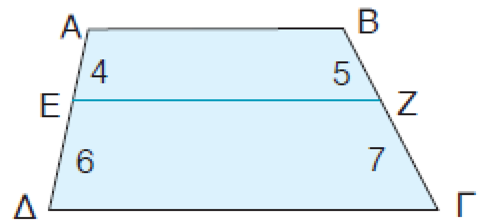
2 Αν ΔΕ // ΒΓ, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$ ☐ β) $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΕ}}$ ☐

γ) $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΕΓ}}$ ☐ δ) $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}$ ☐



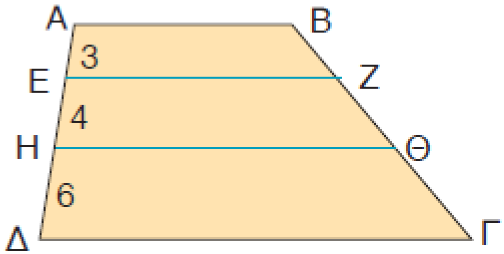
3 Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Αν ΑΒ, ΕΖ, ΗΘ, ΔΓ είναι παράλληλες, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

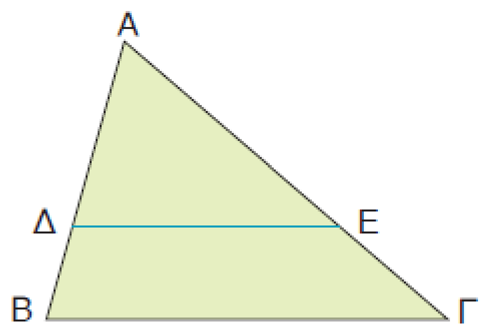
α) $\frac{ΒΖ}{ΘΓ} = \_\_\_$ β) $\frac{ΖΘ}{ΖΓ} = \_\_\_$ γ) $\frac{ΒΘ}{ΒΓ} = \_\_\_$



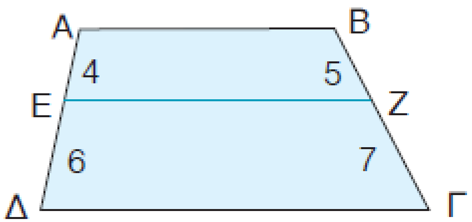
2 Αν ΔΕ // ΒΓ, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\frac{ΔΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ ☐ β) $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΕΓ}{ΑΕ}$ ☐

γ) $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΕΓ}$ ☐ δ) $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ ☐



3 Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

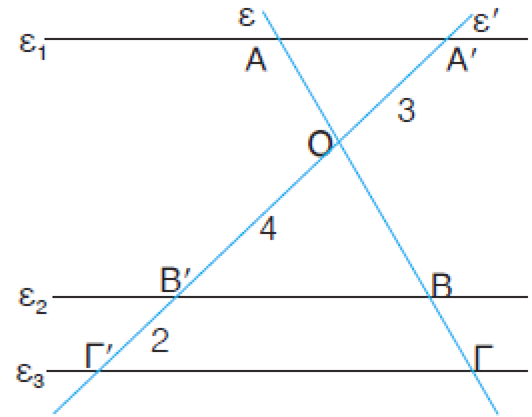


1. α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{2}{5}$, γ) $\frac{7}{13}$ 2. Σ – Λ – Λ – Σ   3. Όχι, γιατί $\frac{4}{6} \neq \frac{5}{7}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4 Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

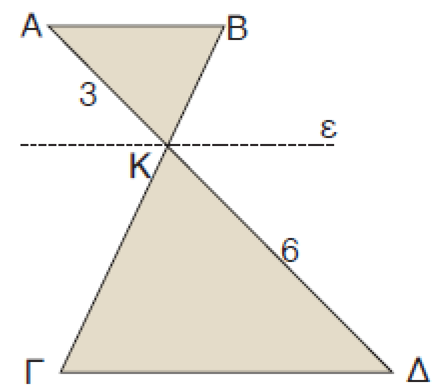
α) $\frac{OB}{B\Gamma}$ β) $\frac{B\Gamma}{O\Gamma}$ γ) $\frac{OA}{OB}$ δ) $\frac{AB}{B\Gamma}$



5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ε // ΓΔ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε λόγο της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{BK}{K\Gamma}$	1. $\frac{2}{3}$
β. $\frac{K\Gamma}{B\Gamma}$	2. $\frac{1}{3}$
γ. $\frac{B\Gamma}{BK}$	3. $\frac{1}{2}$
	4. 3

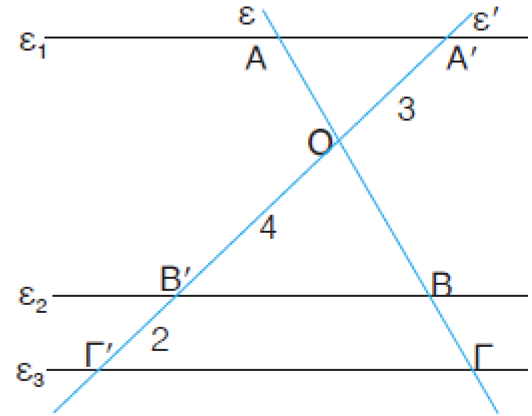
α	β	γ



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4 Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

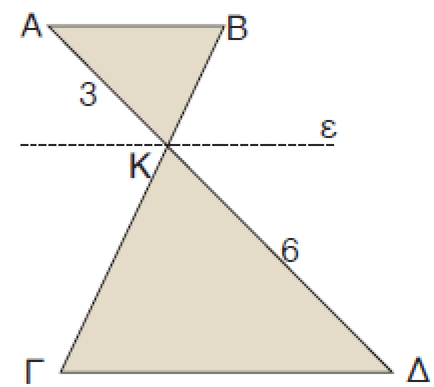
α) $\dfrac{OB}{B\Gamma}$ β) $\dfrac{B\Gamma}{O\Gamma}$ γ) $\dfrac{OA}{OB}$ δ) $\dfrac{AB}{B\Gamma}$



5 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ε // ΓΔ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε λόγο της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\dfrac{BK}{K\Gamma}$	1. $\dfrac{2}{3}$
β. $\dfrac{K\Gamma}{B\Gamma}$	2. $\dfrac{1}{3}$
γ. $\dfrac{B\Gamma}{BK}$	3. $\dfrac{1}{2}$
	4. 3

α	β	γ



4. α) 2, β) $\dfrac{1}{3}$, γ) $\dfrac{3}{4}$, δ) $\dfrac{7}{2}$ 5. α → 3, β → 1, γ → 4