



# Τριγωνομετρία



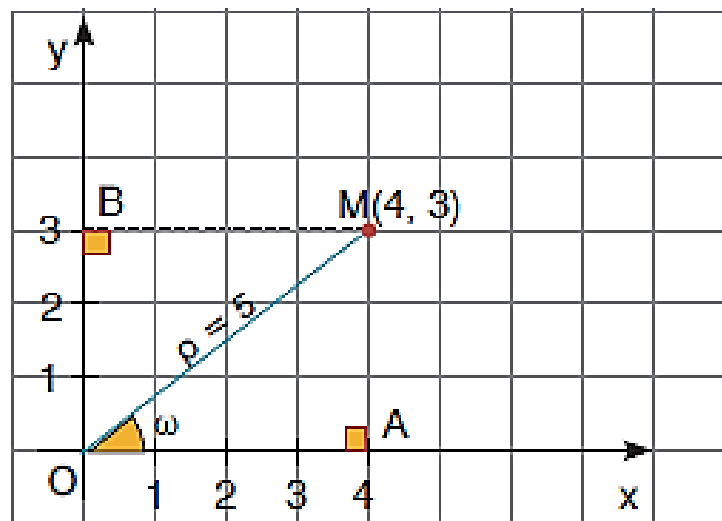
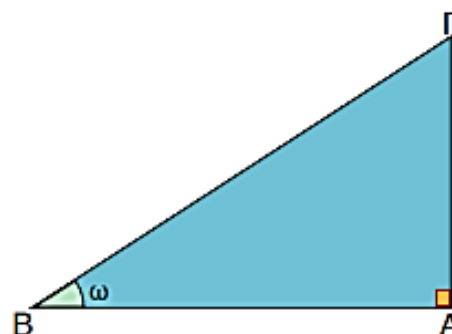
2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $\omega$  με  $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

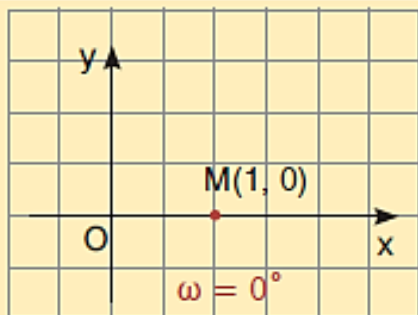


$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}$$

- Αν η γωνία  $\omega$  είναι οξεία, τότε είναι  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $\rho > 0$ , οπότε:  $\eta\mu\omega > 0$ ,  $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$ ,  $\epsilon\phi\omega > 0$ .
- Αν η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία, τότε είναι  $x < 0$ ,  $y > 0$ ,  $\rho > 0$ , οπότε:  $\eta\mu\omega > 0$ ,  $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ ,  $\epsilon\phi\omega < 0$ .

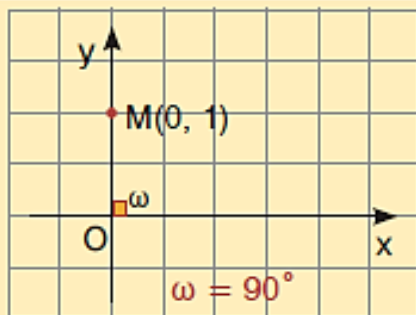
2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $\omega$  με  $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ 


Αν  $M$  σημείο του ημιάξονα  $Ox$   
π.χ. το  $M(1,0)$ , τότε  $\omega = \widehat{xOM} = 0^\circ$   
και  $\rho = OM = 1$ . Άρα:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\epsilon\phi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

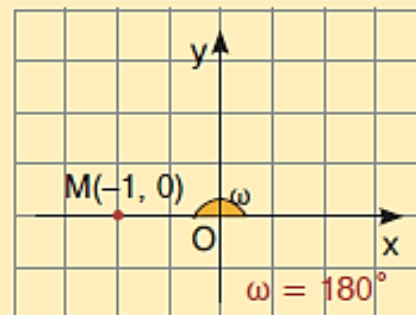


Αν  $M$  σημείο του ημιάξονα  $Oy$   
π.χ. το  $M(0,1)$ , τότε  $\omega = \widehat{xOM} = 90^\circ$   
και  $\rho = OM = 1$ . Άρα:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$\epsilon\phi 90^\circ$  δεν ορίζεται  
(γιατί  $x=0$ )



Αν  $M$  σημείο του ημιάξονα  $Ox'$   
π.χ. το  $M(-1,0)$ , τότε  $\omega = \widehat{xOM} = 180^\circ$   
και  $\rho = OM = 1$ . Άρα:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\epsilon\phi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $\omega$  με  $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

Γωνία $\omega$	Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi\omega$
$0^\circ$	0	1	0	Δεν ορίζεται
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ$	1	0	Δεν ορίζεται	0





## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Για το σημείο  $M(5, 12)$  είναι  $\rho = OM = 13$ . Αν  $\omega = \widehat{xOM}$  να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\eta\mu\omega = \dots\dots \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots \quad \epsilon\phi\omega = \dots\dots$$

- 2 Αν η γωνία  $\omega = \widehat{xOM}$  είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο  $>$  ή  $<$ .

$$\eta\mu\omega \dots 0 \quad \sigma\upsilon\nu\omega \dots 0 \quad \epsilon\phi\omega \dots 0$$

- 3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης A τον ίσο του αριθμό από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
α. $\eta\mu 90^\circ$	
β. $\sigma\upsilon\nu 180^\circ$	
γ. $\epsilon\phi 0^\circ$	1. 0
δ. $\sigma\upsilon\nu 90^\circ$	2. -1
ε. $\eta\mu 0^\circ$	
στ. $\epsilon\phi 180^\circ$	3. 1
ζ. $\sigma\upsilon\nu 0^\circ$	
η. $\eta\mu 180^\circ$	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

- 4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$ .

β) Αν η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία, τότε  $\epsilon\phi\omega < 0$ .

γ) Αν για τη γωνία  $\omega$  ισχύει  $\eta\mu\omega > 0$ , τότε η  $\omega$  είναι οξεία.

δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός.





## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Για το σημείο  $M(5, 12)$  είναι  $\rho = OM = 13$ . Αν  $\omega = \widehat{xOM}$  να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$\eta\mu\omega = \dots\dots$        $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots$        $\epsilon\phi\omega = \dots\dots$

2 Αν η γωνία  $\omega = \widehat{xOM}$  είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο  $>$  ή  $<$ .

$\eta\mu\omega \dots 0$        $\sigma\upsilon\nu\omega \dots 0$        $\epsilon\phi\omega \dots 0$

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης A τον ίσο του αριθμό από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
α. $\eta\mu 90^\circ$	
β. $\sigma\upsilon\nu 180^\circ$	
γ. $\epsilon\phi 0^\circ$	1. 0
δ. $\sigma\upsilon\nu 90^\circ$	2. -1
ε. $\eta\mu 0^\circ$	
στ. $\epsilon\phi 180^\circ$	3. 1
ζ. $\sigma\upsilon\nu 0^\circ$	
η. $\eta\mu 180^\circ$	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

1.  $\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$

2.  $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \epsilon\phi\omega < 0$

3.  $\alpha \rightarrow 3, \beta \rightarrow 2, \gamma \rightarrow 1,$   
 $\delta \rightarrow 1, \epsilon \rightarrow 1, \sigma\tau \rightarrow 1,$   
 $\zeta \rightarrow 3, \eta \rightarrow 1$

4.  $\Sigma - \Sigma - \Lambda - \Sigma$

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$ .

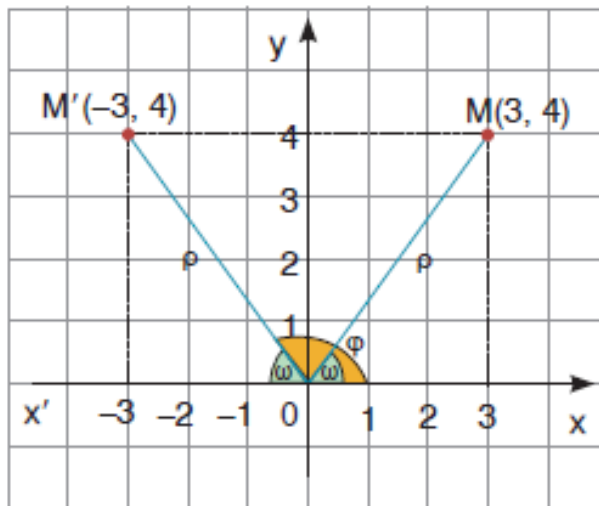
β) Αν η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία, τότε  $\epsilon\phi\omega < 0$ .

γ) Αν για τη γωνία  $\omega$  ισχύει  $\eta\mu\omega > 0$ , τότε η  $\omega$  είναι οξεία.

δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός.



2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών



Τι παρατηρείτε για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $\omega$  και  $\varphi$ ;

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες  $\omega$  και  $180^\circ - \omega$  ισχύουν:

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$





## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α)  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ$

β)  $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$

γ)  $\epsilon\phi 100^\circ = \epsilon\phi 80^\circ$

δ)  $\epsilon\phi 75^\circ = -\epsilon\phi 105^\circ$

ε)  $\sigma\upsilon\nu 110^\circ = -\sigma\upsilon\nu 70^\circ$

στ)  $\eta\mu 140^\circ = -\eta\mu 40^\circ$

2 Αν για τη γωνία  $x$  ισχύει  $0 \leq x \leq 180^\circ$ , να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν  $\eta\mu x = \eta\mu 60^\circ$ , τότε  $x = \dots\dots\dots$

β) Αν  $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$ , τότε  $x = \dots\dots\dots$

γ) Αν  $\epsilon\phi x = -\epsilon\phi 30^\circ$ , τότε  $x = \dots\dots\dots$

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 140^\circ$	1. $\eta\mu 40^\circ$
β. $\sigma\upsilon\nu 140^\circ$	2. $\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
γ. $\epsilon\phi 140^\circ$	3. $\epsilon\phi 40^\circ$
	4. $-\eta\mu 40^\circ$
	5. $-\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
	6. $-\epsilon\phi 40^\circ$

α	β	γ







## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α)  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu 30^\circ$

β)  $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$

γ)  $\epsilon\phi 100^\circ = \epsilon\phi 80^\circ$

δ)  $\epsilon\phi 75^\circ = -\epsilon\phi 105^\circ$

ε)  $\sigma\upsilon\nu 110^\circ = -\sigma\upsilon\nu 70^\circ$

στ)  $\eta\mu 140^\circ = -\eta\mu 40^\circ$

2. Αν για τη γωνία  $x$  ισχύει  $0 \leq x \leq 180^\circ$ , να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν  $\eta\mu x = \eta\mu 60^\circ$ , τότε  $x = \dots\dots\dots$

β) Αν  $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$ , τότε  $x = \dots\dots\dots$

γ) Αν  $\epsilon\phi x = -\epsilon\phi 30^\circ$ , τότε  $x = \dots\dots\dots$

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 140^\circ$	1. $\eta\mu 40^\circ$
β. $\sigma\upsilon\nu 140^\circ$	2. $\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
γ. $\epsilon\phi 140^\circ$	3. $\epsilon\phi 40^\circ$
	4. $-\eta\mu 40^\circ$
	5. $-\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
	6. $-\epsilon\phi 40^\circ$

α	β	γ

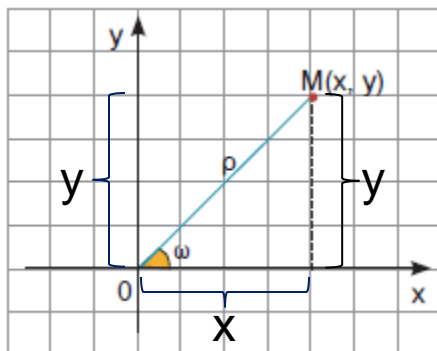
1. Σ - Λ - Λ - Σ - Σ - Λ

2. α)  $x = 60^\circ$  ή  $x = 120^\circ$ , β)  $x = 160^\circ$ , γ)  $x = 150^\circ$

3. α → 1, β → 5, γ → 6



## 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας



Σε προηγούμενη ενότητα μάθαμε ότι για την απόσταση  $\rho$  ενός σημείου  $M(x, y)$  από την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το  $\rho^2$ , τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1 \quad (1).$$

Επειδή  $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$ , η ισότητα (1) γίνεται

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 = 1 \text{ ή συντομότερα } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1.$$

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες  $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$ , με την προϋπόθεση ότι  $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ , έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y\rho}{x\rho} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y}{x} = \epsilon\phi\omega$$

Δηλ.  $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν  $\eta\mu^2\omega = \frac{3}{5}$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{2}{5}$ .

β) Αν  $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ , τότε δεν ορίζεται η εφω.

γ) Για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει  $\eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$ .

δ) Αν  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$ , τότε  $\epsilon\phi\omega = \frac{5}{12}$

2 Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία  $\omega$ , τέτοια ώστε  $\eta\mu\omega = 0$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ . Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν  $\eta\mu\omega = 1$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$

β) Αν  $\eta\mu\omega = 0$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ , τότε το  $\sigma\upsilon\nu\omega$  είναι ίσο με:

α)  $\frac{2}{5}$       β)  $\frac{4}{5}$       γ)  $\frac{2}{5}$  ή  $-\frac{2}{5}$       δ)  $\frac{4}{5}$  ή  $-\frac{4}{5}$





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

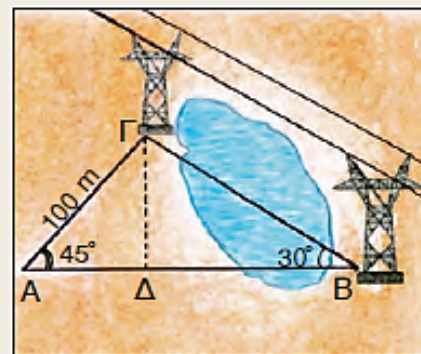
1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
- α) Αν  $\eta\mu^2\omega = \frac{3}{5}$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{2}{5}$ .
- β) Αν  $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ , τότε δεν ορίζεται η εφω.
- γ) Για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει  $\eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$ .
- δ) Αν  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$ , τότε  $\epsilon\phi\omega = \frac{5}{12}$ .
2. Ο Στέφανος ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει γωνία  $\omega$ , τέτοια ώστε  $\eta\mu\omega = 0$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ . Έχει δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- α) Αν  $\eta\mu\omega = 1$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$
- β) Αν  $\eta\mu\omega = 0$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$
4. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ , τότε το  $\sigma\upsilon\nu\omega$  είναι ίσο με:
- α)  $\frac{2}{5}$       β)  $\frac{4}{5}$       γ)  $\frac{2}{5}$  ή  $-\frac{2}{5}$       δ)  $\frac{4}{5}$  ή  $-\frac{4}{5}$

1. Σ - Σ - Λ - Σ  
 2. Ναι, γιατί αν υπήρχε θα ίσχυε  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 0^2 + 0^2 = 0$  (αδύνατο)  
 3. α) 0, β) 1 ή -1  
 4. δ

## 2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

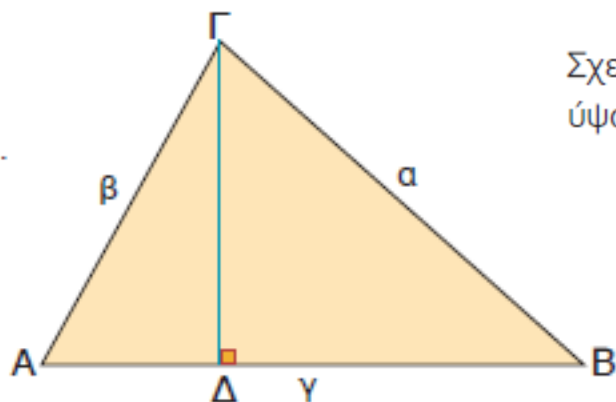
Ένας τοπογράφος δεν μπορεί να μετρήσει την απόσταση  $\Gamma\text{B}$  δύο πυλώνων της  $\Delta\text{E}\text{H}$ , γιατί ανάμεσά τους παρεμβάλλεται μια λίμνη. Γι' αυτό επιλέγει μια θέση  $\text{A}$  που απέχει 100 m από τον πυλώνα  $\Gamma$  και από την οποία φαίνονται και οι δύο πυλώνες. Με ένα γωνιόμετρο μετράει τις γωνίες  $\hat{\text{A}} = 45^\circ$  και  $\hat{\text{B}} = 30^\circ$ .



- Μπορείτε να υπολογίσετε την απόσταση  $\Gamma\text{B}$ , αφού προηγουμένως υπολογίσετε το ύψος  $\Gamma\Delta$  του τριγώνου  $\text{A}\Gamma\Delta$ ; Ο τοπογράφος όμως υπολόγισε την απόσταση  $\Gamma\text{B}$  πιο γρήγορα, γιατί γνώριζε ότι οι λόγοι  $\frac{\Gamma\text{B}}{\eta\mu 45^\circ}$  και  $\frac{\Gamma\text{A}}{\eta\mu 30^\circ}$  είναι ίσοι.
- Με τους υπολογισμούς που εσείς κάνατε, μπορείτε να διαπιστώσετε αν πράγματι οι λόγοι αυτοί είναι ίσοι;

2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

**A** Νόμος των ημιτόνων



Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και φέρουμε το ύψος  $\Gamma\Delta$ . Από τα ορθογώνια τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $\Gamma\Delta B$  έχουμε:

Με τι ισούται το  $\eta\mu A$  και το  $\eta\mu B$ ;

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = \beta\eta\mu A \quad (1)$$

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = \alpha\eta\mu B \quad (2)$$

Από τις ισότητες (1), (2) έχουμε  $\beta\eta\mu A = \alpha\eta\mu B$  ή  $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ .

Ομοίως αποδεικνύεται ότι  $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ .

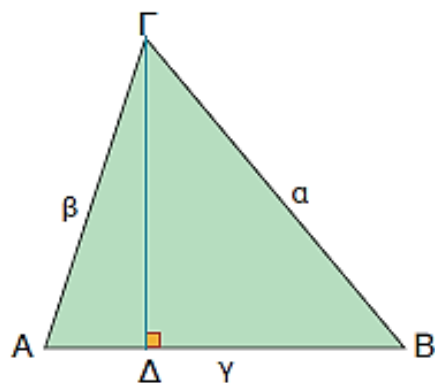
Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$



2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

**B** Νόμος των συνημιτόνων



Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο και φέρουμε το ύψος ΓΔ, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε:  $a^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$  (1).

Επειδή  $\Delta B = \gamma - \Delta\Delta$ , η ισότητα (1) γράφεται:

$$a^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - \Delta\Delta)^2 \quad \text{ή} \quad a^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 + \Delta\Delta^2 - 2\gamma \cdot \Delta\Delta \quad (2).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 + \Delta\Delta^2 = \beta^2 \quad \text{δηλ.} \quad \Delta\Gamma^2 = \beta^2 - \Delta\Delta^2$$

$$\text{και} \quad \text{συν}A = \frac{\Delta\Delta}{\beta} \quad \text{ή} \quad \Delta\Delta = \beta \text{συν}A.$$

Άρα η ισότητα (2) γράφεται:  **$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{συν}A$**

Ομοίως αποδεικνύεται ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν

$$\mathbf{\beta^2 = \gamma^2 + a^2 - 2\gamma a \text{συν}B}$$

$$\mathbf{\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a\beta \text{συν}Γ}$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος  $\text{---} = \text{---} = \text{---}$

2 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων:

α) στο τρίγωνο  $AB\Delta$   $\text{---} = \text{---} = \text{---}$

β) στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$   $\text{---} = \text{---} = \text{---}$

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

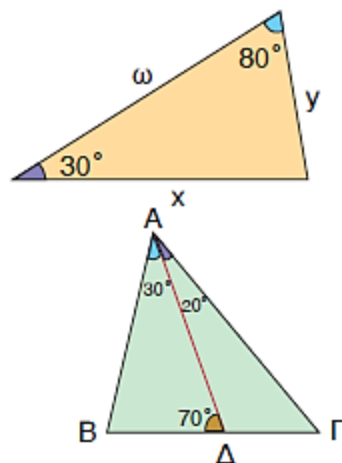
α) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $a\eta\mu B = b\eta\mu A$ .

β) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 100^\circ$ , τότε  $\frac{\beta}{\eta\mu 100^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 20^\circ}$ .

γ) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ .

δ) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 70^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 80^\circ$ , τότε ισχύει  $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu 80^\circ$ .

ε) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ , τότε ισχύει  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ .





## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος  $\text{---} = \text{---} = \text{---}$

2 Να γράψετε τον νόμο των ημιτόνων:

α) στο τρίγωνο  $AB\Delta$   $\text{---} = \text{---} = \text{---}$

β) στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$   $\text{---} = \text{---} = \text{---}$

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

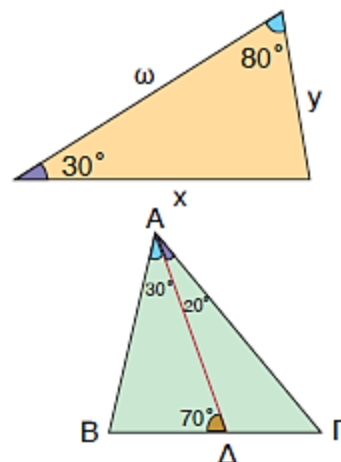
α) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $a\eta\mu B = b\eta\mu A$ .

β) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 100^\circ$ , τότε  $\frac{\beta}{\eta\mu 100^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 20^\circ}$ .

γ) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ .

δ) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 70^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 80^\circ$ , τότε ισχύει  $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu 80^\circ$ .

ε) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ , τότε ισχύει  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ .



1.  $\frac{x}{\eta\mu 80^\circ} = \frac{y}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\omega}{\eta\mu 70^\circ}$

2. α)  $\frac{AB}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{B\Delta}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{A\Delta}{\eta\mu 80^\circ}$

β)  $\frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu 20^\circ} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu 110^\circ} = \frac{A\Delta}{\eta\mu 50^\circ}$

3. Σ - Λ - Σ - Λ - Σ



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με τον νόμο των συνημιτόνων:

$$x^2 = \dots\dots\dots \quad y^2 = \dots\dots\dots \quad \omega^2 = \dots\dots\dots$$

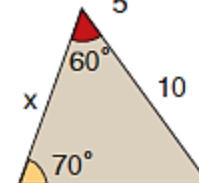
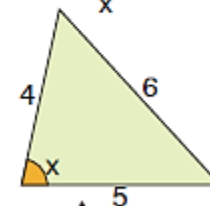
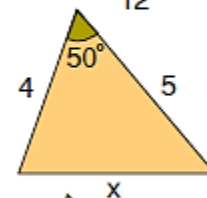
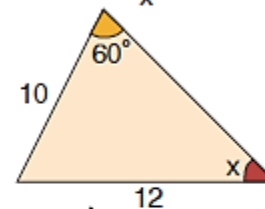
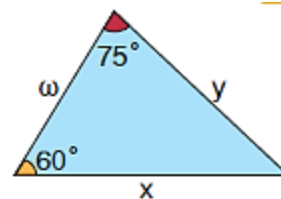
5 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

α) Η γωνία  $x$  υπολογίζεται με τον νόμο των  $\dots\dots\dots$   
από την ισότητα  $\dots\dots\dots$

β) Η πλευρά  $x$  υπολογίζεται με τον νόμο των  $\dots\dots\dots$   
από την ισότητα  $\dots\dots\dots$

γ) Η γωνία  $x$  υπολογίζεται με τον νόμο των  $\dots\dots\dots$   
από την ισότητα  $\dots\dots\dots$

δ) Η πλευρά  $x$  υπολογίζεται με τον νόμο των  $\dots\dots\dots$   
από την ισότητα  $\dots\dots\dots$



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

4 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες σύμφωνα με τον νόμο των συνημιτόνων:

$$x^2 = \dots\dots\dots \quad y^2 = \dots\dots\dots \quad \omega^2 = \dots\dots\dots$$

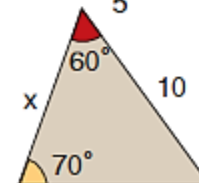
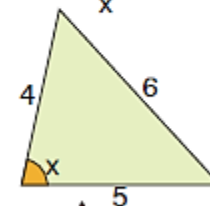
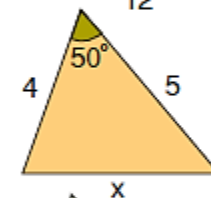
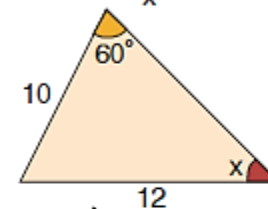
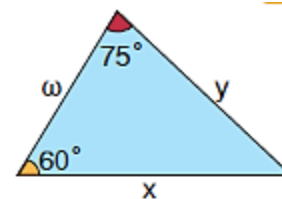
5 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις

α) Η γωνία  $x$  υπολογίζεται με τον νόμο των  $\dots\dots\dots$   
από την ισότητα  $\dots\dots\dots$

β) Η πλευρά  $x$  υπολογίζεται με τον νόμο των  $\dots\dots\dots$   
από την ισότητα  $\dots\dots\dots$

γ) Η γωνία  $x$  υπολογίζεται με τον νόμο των  $\dots\dots\dots$   
από την ισότητα  $\dots\dots\dots$

δ) Η πλευρά  $x$  υπολογίζεται με τον νόμο των  $\dots\dots\dots$   
από την ισότητα  $\dots\dots\dots$



4.  $x^2 = \omega^2 + y^2 - 2\omega y \cos 75^\circ$ ,  $y^2 = x^2 + \omega^2 - 2x\omega \cos 60^\circ$ ,  $\omega^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ$

5. α) ημιτόνων,  $\frac{10}{\eta\mu x} = \frac{12}{\eta\mu 60^\circ}$ , β) συνημιτόνων,  $x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 50^\circ$

γ) συνημιτόνων,  $6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos x$  δ) ημιτόνων  $\frac{x}{\eta\mu 50^\circ} = \frac{10}{\eta\mu 70^\circ}$

