ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Λυμένες ασκήσεις

1) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζετε ότι α = 4 cm , $\hat{B}=40^\circ$ *και* $\hat{\Gamma}=80^\circ$.

Λύση

Γνωρίζουμε μια πλευρά και δύο γωνίες . Βρισκόμαστε δηλαδή στην 1η περίπτωση .

Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$ $\delta\eta\lambda$ $\hat{A}=180^\circ-\hat{B}-\hat{\Gamma}=180^\circ-40^\circ-80^\circ=60^\circ$.

Από το νόμο των ημιτόνων και επιλέγοντας την κατάλληλη ισότητα ώστε να ξέρουμε τα περισσότερα στοιχεία έχουμε :

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}}=\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} \quad \delta\eta\lambda \quad \frac{4}{\eta\mu 60^\circ}=\frac{\beta}{\eta\mu 40^\circ} \quad \delta\eta\lambda \quad \frac{4}{0,866}=\frac{\beta}{0,643} \quad \delta\eta\lambda$$

$$0,866\beta=2,572 \quad \delta\eta\lambda \quad \beta=\frac{2,572}{0,866}=2,96cm$$

Όμοια για την πλευρά γ έχουμε :

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}}=\frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \quad \delta\eta\lambda \quad \frac{4}{\eta\mu 60^\circ}=\frac{\gamma}{\eta\mu 80^\circ} \quad \delta\eta\lambda \quad \frac{4}{0,866}=\frac{\gamma}{0,985} \quad \delta\eta\lambda$$

$$0,866\gamma=3,94 \quad \delta\eta\lambda \quad \gamma=\frac{3,94}{0,866}=4,54cm$$

2) Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζετε ότι α = 4 cm , β=5cm $\hat{B}=100^\circ$.

Λύση

Γνωρίζουμε δύο πλευρές και μια γωνία η οποία δεν είναι η περιεχόμενη.

Εφαρμόζουμε το νόμο ημιτόνων και διαλέγουμε εκείνη την ισότητα για την οποία έχουμε τα περισσότερα στοιχεία .

$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}}$ $\delta\eta\lambda$ $\frac{4}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{5}{\eta\mu 100^\circ}$ $\delta\eta\lambda$ $\frac{4}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{5}{0,985}$ $\delta\eta\lambda$

$5\eta\mu\hat{A} = 3,94$ $\delta\eta\lambda$ $\eta\mu\hat{A} = \frac{3,94}{5} = 0,788$

(Θυμίζουμε ότι $\eta\mu 100^\circ = \eta\mu 80^\circ$)

Από τους πίνακες βρίσκουμε ότι $\hat{A} = 52^\circ$ ή $\hat{A} = 128^\circ$.

Επειδή όμως $\hat{B} = 100^\circ$ δεν γίνεται $\hat{A} = 128^\circ$. Συνεπώς $\hat{A} = 52^\circ$.

Όποτε $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 52^\circ - 100^\circ = 28^\circ$.

Τέλος από τον νόμο ημιτόνων για τη πλευρά γ έχουμε :

$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}}$ $\delta\eta\lambda$ $\frac{4}{\eta\mu 52^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 28^\circ}$ $\delta\eta\lambda$ $\frac{4}{0,788} = \frac{\gamma}{0,438}$ $\delta\eta\lambda$

$0,788\gamma = 1,752$ $\delta\eta\lambda$ $\gamma = \frac{1,752}{0,788} = 2,23cm$

3) Να επιλυθεί το τρίγωνο αν γνωρίζετε ότι α = 8 cm , β = 6 cm και $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία . Εφαρμόζουμε το νόμο συνημιτόνων για την πλευρά γ και έχουμε :

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = 8^2 + 6^2 - 2\cdot 8\cdot 6\sigma\upsilon\nu 120^\circ = 64 + 36 - 2\cdot 8\cdot 6\cdot(-\frac{1}{2}) = 100 + 48 = 148$$

δηλαδή $\gamma = \sqrt{148} = 12.16cm$.

(Θυμίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ$) .

Για τις γωνίες Β και Α μπορούμε να εφαρμόσουμε είτε νόμο ημιτόνων είτε συνημιτόνων . Είναι

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{6^2+12,16^2-8^2}{2\cdot 8\cdot 12,16} = 0,616$$ και από τους πίνακες βρίσκουμε

ότι $\hat{A} = 52^\circ$.

Τέλος έχουμε ότι : $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 52^\circ - 120^\circ = 8^\circ$

4) Να επιλυθεί το τρίγωνο αν γνωρίζετε ότι α = 8 cm , β = 6 cm και γ = 5 cm .

Λύση

Γνωρίζουμε τρεις πλευρές .Εφαρμόζουμε νόμο συνημιτόνων και έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{6^2+5^2-8^2}{2\cdot 6\cdot 5} = -0,05$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{8^2+5^2-6^2}{2\cdot 8\cdot 5} = 0,662$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{8^2+6^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 6} = 0,781$$

Από τους πίνακες βρίσκουμε ότι $\hat{A} = 93^\circ$ $\hat{B} = 48^\circ$ $\hat{\Gamma} = 39^\circ$.

5) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ να δείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

Λύση

Από τον Νόμο Συνημιτόνων έχουμε ότι : $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$.

Αν αντικαταστήσουμε το γ^2 με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$
$$\alpha\beta = -2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$
$$1 = -2\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$
$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = -\frac{1}{2}$$
$$\hat{\Gamma} = 120^\circ$$

αφού $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$.

6) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι : $\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} - \gamma\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha}$

Λύση

Ξεκινάμε από το 1° μέλος αντικαθιστώντας τα συνΒ και συνΓ από τις σχέσεις (5) και (6) του νόμου συνημιτόνων και έχουμε :

$$\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} - \gamma\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \beta\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} - \gamma\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} - \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} =$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{2\beta^2 - 2\gamma^2}{2\alpha} = \frac{2(\beta^2 - \gamma^2)}{2\alpha} = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha}$$

7) Αν σε τρίγωνο ισχύει ότι α + β = 2γ τότε να δείξετε ότι :

$\alpha\sigma\upsilon\nu\hat{B} - \beta\sigma\upsilon\nu\hat{A} = 2(\alpha - \beta)$.

Λύση

Ξεκινάμε από το 1º μέλος αντικαθιστώντας τα συνB και συνΓ από τις σχέσεις (5) και (4) του νόμου συνημιτόνων και έχουμε :

$$\alpha\sigma\upsilon\nu\hat{B} - \beta\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \alpha\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} - \beta\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\gamma} - \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\gamma} =$$

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{2\gamma} = \frac{2\alpha^2-2\beta^2}{2\gamma} = \frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{2\gamma} = \frac{2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{2\gamma} = \frac{2\cdot 2\gamma(\alpha-\beta)}{2\gamma} = 2(\alpha-\beta)$$

αφού από την υπόθεση έχουμε ότι α +β = 2γ .

8) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α +β =9 cm , $\hat{A} = 45^\circ$ $\kappa\alpha\iota$ $\hat{B} = 56^\circ$ να βρείτε τις πλευρές α και β .

Λύση

Από το νόμο ημιτόνων έχουμε ότι :

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} \quad \delta\eta\lambda \quad \frac{\alpha}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 56^\circ} \quad \delta\eta\lambda \quad \frac{\alpha}{0,707} = \frac{\beta}{0,829} \quad \delta\eta\lambda$$

$$\alpha = \frac{0,707\beta}{0,829} \quad \delta\eta\lambda \quad \alpha = 0,85\beta \quad (1)$$

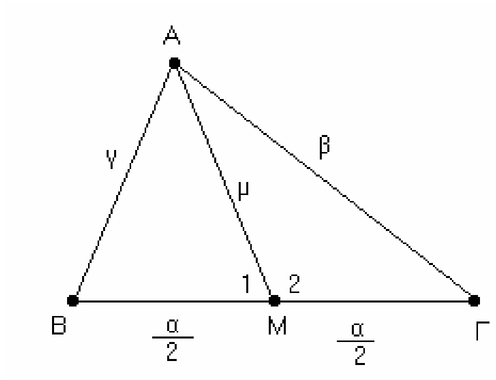
Από την υπόθεση έχουμε ότι α +β =9 και με τη βοήθεια της (1) έχουμε :

0,85β + β = 9 δηλ 1,85β = 9 δηλ β = 4,86 cm

οπότε α = 9 – 4,86 = 4,14 cm .

9) Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΜ = μ είναι η διάμεσος . Να δείξετε ότι :

α) $\beta^2 = \mu^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{M}_2$ β) $\gamma^2 = \mu^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{M}_1$ γ) $\beta^2+\gamma^2 = 2\mu^2 + \frac{\alpha^2}{2}$



Λύση

α) Εφαρμόζοντας το νόμο συνημιτόνων στο ΑΜΓ έχουμε :

$$\beta^2 = \mu^2 + (\frac{\alpha}{2})^2 - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_2 = \mu^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_2$$

β) Εφαρμόζοντας το νόμο συνημιτόνων στο ΑΜΒ έχουμε :

$$\gamma^2 = \mu^2 + (\frac{\alpha}{2})^2 - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_1 = \mu^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_1$$

γ) Επειδή $\hat{\mathrm{M}}_1 + \hat{\mathrm{M}}_2 = 180^\circ$ έχουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_1 = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \hat{\mathrm{M}}_2) = -\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_2$ (1)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις που δείξαμε στα προηγούμενα ερωτήματα και έχουμε :

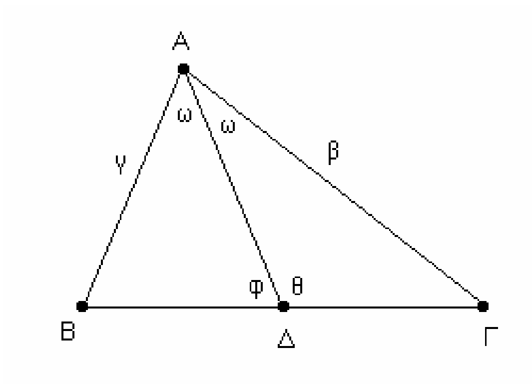
$$\beta^2 + \gamma^2 = \mu^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_2 + \mu^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_1 = 2\mu^2 + \frac{2\alpha^2}{4} - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_2 - \alpha\mu(-\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_2) =$$

$$2\mu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_2 + \alpha\mu\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{M}}_2 = 2\mu^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Δηλαδή $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ γνωστό και ως **Θεώρημα Διαμέσων** .

10) Στο παρακάτω σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος . Να δείξετε ότι :

α) $\mathrm{B}\Delta = \frac{\gamma\eta\mu\omega}{\eta\mu\phi}$ β) $\Delta\Gamma = \frac{\beta\eta\mu\omega}{\eta\mu\theta}$ γ) $\frac{\mathrm{B}\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$



Λύση

α) Εφαρμόζουμε το νόμο ημιτόνων στο ΑΒΔ και έχουμε :

$$\frac{\mathrm{B\Delta}}{\eta\mu\omega} = \frac{\gamma}{\eta\mu\phi} \quad \delta\eta\lambda \quad \mathrm{B\Delta} = \frac{\gamma\eta\mu\omega}{\eta\mu\phi} \quad (1)\ .$$

β) Εφαρμόζουμε το νόμο ημιτόνων στο ΑΓΔ και έχουμε :

$$\frac{\Gamma\Delta}{\eta\mu\omega} = \frac{\gamma}{\eta\mu\theta} \quad \delta\eta\lambda \quad \Gamma\Delta = \frac{\gamma\eta\mu\omega}{\eta\mu\theta} \quad (2)\ .$$

γ) Είναι $\phi + \theta = 180^\circ$ οπότε $\eta\mu\phi = \eta\mu(180^\circ - \theta) = \eta\mu\theta$ (3) .

Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη και με τη βοήθεια της (3) έχουμε :

$$\frac{\mathrm{B\Delta}}{\Gamma\Delta} = \frac{\dfrac{\gamma\eta\mu\omega}{\eta\mu\phi}}{\dfrac{\beta\eta\mu\omega}{\eta\mu\theta}} = \frac{\gamma\eta\mu\omega\eta\mu\theta}{\beta\eta\mu\omega\eta\mu\phi} = \frac{\gamma}{\beta}$$ γνωστό και ως **Θεώρημα Διχοτόμων** .

11) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι α = λβ να δείξετε ότι $\eta\mu\hat{\mathrm{A}} = \lambda\eta\mu\hat{\mathrm{B}}$.

Λύση

Από το νόμο ημιτόνων έχουμε ότι :

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{\mathrm{A}}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{\mathrm{B}}}$$ που αν αντικαταστήσουμε απ΄την υπόθεση α = λβ έχουμε :

$\frac{\lambda\beta}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}}$ $\delta\eta\lambda$ $\lambda\beta\eta\mu\hat{B} = \beta\eta\mu\hat{A}$ $\delta\eta\lambda$ $\eta\mu\hat{A} = \lambda\eta\mu\hat{B}$.

12) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu^2\hat{A} = \eta\mu^2\hat{B} + \eta\mu^2\hat{\Gamma}$ να δείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

<u>Λύση</u>

Από το νόμο ημιτόνων έχουμε ότι :

$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}}$ $\delta\eta\lambda$ $\beta\eta\mu\hat{A} = \alpha\eta\mu\hat{B}$ $\delta\eta\lambda$ $\eta\mu\hat{B} = \frac{\beta\eta\mu\hat{A}}{\alpha}$ (1) και

$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}}$ $\delta\eta\lambda$ $\gamma\eta\mu\hat{A} = \alpha\eta\mu\hat{\Gamma}$ $\delta\eta\lambda$ $\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{\gamma\eta\mu\hat{A}}{\alpha}$ (2) .

Έτσι η δοθείσα σχέση με τη βοήθεια των (1) και (2) γίνεται :

$$\eta\mu^2\hat{A} = \eta\mu^2\hat{B} + \eta\mu^2\hat{\Gamma}$$
$$\eta\mu^2\hat{A} = \left(\frac{\beta\eta\mu\hat{A}}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma\eta\mu\hat{A}}{\alpha}\right)^2$$
$$\eta\mu^2\hat{A} = \frac{\beta^2\eta\mu^2\hat{A}}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\eta\mu^2\hat{A}}{\alpha^2}$$
$$\eta\mu^2\hat{A} = \frac{\beta^2\eta\mu^2\hat{A} + \gamma^2\eta\mu^2\hat{A}}{\alpha^2}$$
$$\alpha^2\eta\mu^2\hat{A} = \eta\mu^2\hat{A}(\beta^2 + \gamma^2)$$
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

που από το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

13) Σε κάθε τρίγωνο να δείξετε ότι : $\frac{\varepsilon\phi\hat{A}}{\varepsilon\phi\hat{B}} = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\beta\sigma\upsilon\nu\hat{A}} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}$

<u>Λύση</u>

$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}}$ $\delta\eta\lambda$ $\beta\eta\mu\hat{A} = \alpha\eta\mu\hat{B}$ $\delta\eta\lambda$ $\frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\alpha}{\beta}$ (1) .

Με τη βοήθεια της (1) και της βασικής ταυτότητας $\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ έχουμε :

$\frac{\varepsilon\phi\hat{A}}{\varepsilon\phi\hat{B}} = \frac{\frac{\eta\mu\hat{A}}{\sigma\upsilon\nu\hat{A}}}{\frac{\eta\mu\hat{B}}{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}} = \frac{\eta\mu\hat{A}\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\eta\mu\hat{B}\sigma\upsilon\nu\hat{A}} = \frac{\eta\mu\hat{A}}{\eta\mu\hat{B}} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\sigma\upsilon\nu\hat{A}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\sigma\upsilon\nu\hat{A}} = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\beta\sigma\upsilon\nu\hat{A}}$ και αν στην σχέση

που δείξαμε αντικαταστήσουμε τα συν Α και συν Β από το νόμο συνημιτόνων έχουμε :

$$\frac{\varepsilon\phi\hat{A}}{\varepsilon\phi\hat{B}} = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\hat{B}}{\beta\sigma\upsilon\nu\hat{A}} = \frac{\alpha\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}}{\beta\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}} = \frac{\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\gamma}}{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\gamma}} = \frac{(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)2\gamma}{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)2\gamma} = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}$$