

## **Ιστορική εξέλιξη και αντιλήψεις για τη φύση των Μαθηματικών.**

Μελετώντας το παρελθόν και παρατηρώντας την σταδιακή εξέλιξη των μαθηματικών από τούς προελληνικούς χρόνους έως σήμερα, διαπιστώνουμε ότι τα μαθηματικά αποτέλεσαν έναν από τους κύριους μοχλούς ανάπτυξης του πολιτισμού, ενώ ταυτόχρονα και το πολιτιστικό περιβάλλον έδινε ερεθίσματα για την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης. Στην πορεία αυτή της εξέλιξης των μαθηματικών αντανακλάται τόσο η πρόοδος των πολιτισμών στους οποίους αναπτύχθηκαν όσο και οι οπισθοδρομήσεις τους.

Στην εργασία αυτή θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών, παράλληλα με την αναφορά του πολιτιστικού υποβάθρου στο οποίο αυτή εξελίχθηκε. Στη συνέχεια γίνεται μια έκθεση της από αρχαίων χρόνων προσπάθειας για ερμηνεία της φύσης των μαθηματικών αλλά και των κύριων σύγχρονων ρευμάτων που ασχολούνται με αυτήν και τέλος επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον στα «Ανθρωπιστικά Μαθηματικά».

### **Σύντομη Ιστορική Εξέλιξη των Μαθηματικών και το πολιτιστικό τους υπόβαθρο.**

Το χρόνο της ιστορίας των μαθηματικών μπορούμε να τον διαιρέσουμε ως εξής : *Προελληνικά Μαθηματικά* (έως το 600 π.Χ.), *Ελληνικά Μαθηματικά* (600 π.Χ. έως 300 π.Χ.)

*Ελληνιστικά Μαθηματικά* (300 π.Χ. έως 500 μ.Χ.), *Μεσαιωνικά και Αναγεννησιακά Μαθηματικά* (1200 μ.Χ. έως 1700 μ.Χ.), *Σύγχρονα Μαθηματικά* ( 1700 μ.Χ. έως σήμερα).

#### ***Προελληνικά Μαθηματικά***

Οι πρωτόγονοι λαοί σύμφωνα με κάποιες σύγχρονες μελέτες (Wilder, Clawson) έχει αποδειχθεί ότι είχαν αναπτύξει την έννοια της μέτρησης (με κλαδιά) και της αντιστοιχίας, ενώ 100.000 χρόνια πριν είχαν χρησιμοποιήσει κάποιες μαθηματικές λέξεις. Οι κυνηγοί – τροφοσυλλέκτες (70.000-20.000 χρόνια πριν)

ενδεχομένως να καταλάβαιναν την απλή πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την αφαίρεση, ενώ το μοίρασμα της τροφής δείχνει ότι μπορεί να κατανοούσαν και τη διαίρεση.

Οι **Αιγύπτιοι** ήταν ο πρώτος λαός που ασχολήθηκε με την μαθηματική επιστήμη. Οι γνώσεις που κατείχαν ήταν απόρροια της αναγκαιότητας επίλυσης προβλημάτων που σχετίζονταν με τις γεωργικές τους καλλιέργειες κατά μήκος του ποταμού Νείλου. Οι περισσότερες γνώσεις μας σε ότι αφορά τα Αιγυπτιακά μαθηματικά, προέρχονται από δυο διάσημους παπύρους, τον πάπυρο του *Rhind* που χρονολογείται περίπου το 1650 π.Χ. και του παπύρου της Μόσχας που χρονολογείται μεταξύ 2000π.Χ και 1800 π.Χ. Από αυτούς φαίνεται ότι οι Αιγύπτιοι κατείχαν αξιόλογες γνώσεις καθώς ασχολούνταν με συγκεκριμένες περιπτώσεις αριθμητικών προβλημάτων (υπολογισμός όγκων, επίλυση εξισώσεων κ.ά.) χωρίς ωστόσο να φαίνεται ότι είχαν αναπτύξει γενικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων.

Τα ίδια περίπου ισχύουν και για τους αρχαίους **Βαβυλώνιους**, γνωστούς για τις μεγάλες μηχανικές κατασκευές τους, που ανέπτυξαν τα μαθηματικά λόγω αναγκών που προέκυψαν από τη συγκεκριμένη ενασχόλησή τους. Στους Βαβυλώνιους αποδίδεται και το εξηταδικό σύστημα αρίθμησης το οποίο μέχρι και σήμερα χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς, όπως η μέτρηση του χρόνου. Επίσης είχαν συντάξει πολλούς πίνακες για πολλαπλασιασμό, εύρεση τετραγώνων και τετραγωνικών ριζών, ενώ είχαν και γνώση ειδικών περιπτώσεων του Πυθαγορείου θεωρήματος, και γενικότερα έφτασαν σε μεγαλύτερο μαθηματικό επίπεδο από τους σύγχρονούς τους Αιγυπτίους.

Άλλοι λαοί που ασχολήθηκαν αυτήν την περίοδο με τον ένα ή τον άλλο τρόπο με τα μαθηματικά ήταν οι Κινέζοι, οι Ινδοί, οι Φοίνικες, και οι Κρήτες της Μινωικής περιόδου. Οι μαθηματικές γνώσεις όλων αυτών των λαών κατά την προελληνική περίοδο ήταν συνυφασμένες με τη γενικότερη κοινωνική, πολιτικοοικονομική και πολιτιστική ανάπτυξή τους, και ουσιαστικά πρόκειται για συλλογή εμπειρικών μεθόδων αναγκαίων για την εκτέλεση έργων και διαδικασιών που θα βοηθούσαν σε αυτήν την ανάπτυξη.

Το γεγονός ότι οι μέθοδοι αυτές που ανέπτυξαν έμειναν σε πρακτικό επίπεδο και δεν απέκτησαν μορφή κανόνων, δηλαδή θεωρητική βάση, οφείλεται κατά κύριο λόγο στη δομή της κοινωνίας τους, καθώς οι βαθιές θεοκρατικές δομές που ίσχυαν, είχαν ως αποτέλεσμα την μη περαιτέρω εξέλιξη της κατεχόμενης γνώσης.

### ***Ελληνικά Μαθηματικά***

Η παρακμή των προηγούμενων πολιτισμών με τη συγκεκριμένη πολιτικοθεολογική δομή δίνει την θέση της σε κάτι νέο, κάτι διαφορετικό. Στο αρχαίο Ελληνικό θαύμα. Δημιουργήθηκε μια νέα κοινωνικοπολιτική βάση, όπου λόγω του εμπορίου η επαφή με άλλους λαούς, και επομένως και η μεταφορά γνώσης έγινε πιο εύκολη. Η γνώση βρέθηκε κάτω από το πρίσμα ορθολογισμού και της επιστημονικής θεώρησης. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι αυτή η μεταστροφή στην ανθρώπινη σκέψη, έγινε από τους φιλοσόφους που κατείχαν το σύνολο της γνώσης. Η φιλοσοφία και τα μαθηματικά ήταν αδιάσπαστα δεμένα. Η δυνατότητα αμφισβήτησης εδραιωμένων θεωρήσεων, η ανθρώπινη διάσταση των θεών που λατρεύονταν, η αντιπαράθεση, η ανάπτυξη της δημοκρατίας και ο γόνιμος διάλογος ήταν κάποια από τα συστατικά της νέας αυτής εποχής.

Αν και πολλές από τις μαθηματικές γνώσεις που αναφέρονται στην χαραυγή αυτής της νέας περιόδου, είχαν ανακαλυφθεί από προγενέστερους λαούς, η μεγάλη συνεισφορά των αρχαίων Ελλήνων στην μαθηματική επιστήμη έγκειται στην προσθήκη της *απόδειξης*. Εγκαταλείφθηκαν οι εμπειρικές μέθοδοι και εδραιώθηκε η άποψη ότι οι μαθηματικές αλήθειες πρέπει να εξάγονται μέσα από μια *παραγωγική συλλογιστική*. Σύμφωνα με τον *H. Eves*, οι τρεις λόγοι που θα μπορούσαν να εξηγήσουν αυτήν τη μεταστροφή είναι η ερευνητική σκέψη των φιλοσόφων, η αγάπη των Ελλήνων για το κάλλος, όπως φαίνεται στην τέχνη τους, στη γλυπτική και την αρχιτεκτονική τους, και η επικρατούσα τότε δουλοκτητική φύση της ελληνικής κοινωνίας.

Ο **Θαλής** (περί το 600 π.Χ.) είναι ο πρώτος μαθηματικός στον οποίο αποδίδονται κάποιες γνωστές προτάσεις, τις οποίες αποδεικνύει κάνοντας χρήση της *παραγωγικής συλλογιστικής*. Συνεχιστής και προωθητής αυτής της σκέψης ήταν ο **Πυθαγόρας** (572-497 π.Χ.), ο οποίος υπήρξε και ιδρυτής της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας σύμφωνα με την οποία οι φυσικοί αριθμοί και οι λόγοι τους βρίσκονται παντού στο σύμπαν και το ρυθμίζουν. Το Πυθαγόρειο θεώρημα και η απόδειξή του αποτελούν σίγουρα μια, και σίγουρα όχι την μοναδική, μεγάλη συνεισφορά του Πυθαγόρα στην μαθηματική επιστήμη. Η ανακάλυψη αργότερα των άρρητων αριθμών κλόνισε το Πυθαγόρειο σύμπαν και αποτέλεσε την πρώτη μεγάλη κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών, η οποία έντεχνα ξεπεράστηκε περίπου στα 300 π.Χ. από τον **Εύδοξο**.

Ο μεγάλος Έλληνας φιλόσοφος **Πλάτωνας** (429-347 π.Χ.) επηρεάστηκε αρκετά από τον Πυθαγόρα και ανέπτυξε μια φιλοσοφία σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πραγματικά και βρίσκονται σε κάποιο ιδεατό βασίλειο, στον κόσμο του «είναι», ανεξάρτητα από το ανθρώπινο γένος. Έργο του μαθηματικού είναι να ανακαλύψει αυτές τις μαθηματικές οντότητες. Ο Πλάτωνας πίστευε ότι η μελέτη των μαθηματικών ήταν απαραίτητη και υποχρεωτική για αυτούς που θα έπρεπε να κυβερνούν την ιδανική πολιτεία, γι' αυτό και στην είσοδο της σχολής του είχε αναρτήσει την φράση : «Μηδείς αγεωμέτρητος είσιτω».

Η μεγάλη όμως αλλαγή που επέφερε η Ελληνική μαθηματική σκέψη εδραιώθηκε με τα «Στοιχεία» του **Ευκλείδη** (περί το 300 π.Χ.). Για πρώτη φορά οι έως τότε αποκτηθείσες γνώσεις, και όχι μόνο, οργανώθηκαν και παρουσιάστηκαν στα 13 βιβλία που τα απαρτίζουν. Η *παραγωγική συλλογιστική* απέκτησε το «ευαγγέλιό» της. Τα «Στοιχεία» αποτελούν την αρχαιότερη εφαρμογή της πραγματικής *αξιωματικής μεθόδου* σύμφωνα με την οποία μια πραγματεία πρέπει να αποτελείται από κάποιες αρχικές έννοιες και δηλώσεις (ορισμοί, αιτήματα, αξιώματα ή κοινές έννοιες) και όλες οι επακόλουθες προτάσεις να προκύπτουν από αυτές με την χρήση *παραγωγική συλλογιστικής*. Σύγχρονος με τον Ευκλείδη είναι ο **Εύδοξος** ο οποίος είναι γνωστός για τις εργασίες του πάνω στην γεωμετρία.

Η σημαντική αυτή περίοδος για τα μαθηματικά θα δώσει τη σκυτάλη σε μια άλλη εξίσου γόνιμη, την Ελληνιστική περίοδο. Οι κατακτήσεις του Μεγάλου Αλεξάνδρου διαμοιράζονται στα χέρια των στρατηγών του και έτσι ο Ελληνικός πολιτισμός συνεχίζει να διαχέεται σε μεγάλα τμήματα του ανατολικού κόσμου.

### ***Ελληνιστικά Μαθηματικά***

Η περίοδος αυτή σφραγίζεται από τη μεγάλη μορφή του **Αρχιμήδη** (277-212 π.Χ.). Ο Αρχιμήδης σε αντίθεση με τους προγενέστερους του εξηγεί και αποκαλύπτει το σκεπτικό που τον οδήγησε στις ανακαλύψεις του, κυρίως στο έργο του «Μέθοδος». Σε αυτόν οφείλουμε πολλές ανακαλύψεις όπως την πρώτη μέθοδο για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων (μέθοδος εξάντλησης), αλλά και τις σπουδαίες ανακαλύψεις στην μηχανική και την υδροστατική. Σύγχρονος με τον Αρχιμήδη σπουδαίος μαθηματικός είναι ο **Απολλώνιος** με την εργασία του «Κωνικές τομές», ενώ άλλοι σημαντικοί κατοπινοί μαθηματικοί είναι ο **Ίππαρχος** (πρόδρομος της τριγωνομετρίας), ο **Διόφαντος** (θεωρείται ο «πατέρας της Άλγεβρας»), ο **Πάππος**

(Γεωμετρία), ο **Πτολεμαίος** (τριγωνομετρία και πλανητικές κινήσεις) και ο **Πρόκλος** στον οποίο οφείλεται η διάσωση των «Στοιχείων» διαμέσου του σχολιασμού του.

### **Μεσαιωνικά και Αναγεννησιακά Μαθηματικά**

Η κατάκτηση της Ελλάδας από τους Ρωμαίους κατέστρεψε τον Ελληνικό πολιτισμό. Η περίοδος που ακολουθεί δεν ήρθε να προσθέσει κάτι πολύ σημαντικό στην εξέλιξη των μαθηματικών, παρά τις αξιόλογες προσπάθειες των Αράβων μαθηματικών (**Bhaskara, Al Khowarismi** κ.ά.) ειδικά στην άλγεβρα, και των Ευρωπαίων όπως ο **Fibonacci**. Στην Ευρώπη ειδικά οι ισχυρές θεοκρατικές αντιλήψεις της Καθολικής εκκλησίας δεν ενθάρρυναν τις προσπάθειες για κατάκτηση γνώσης. Προς το τέλος αυτής της περιόδου και μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης από τους Οθωμανούς, πολλοί μελετητές παίρνοντας ό,τι χειρόγραφα μπορούσαν να διασώσουν κατέφυγαν προς την Δύση. Από την άλλη μέσω του εμπορίου πολλές ιδέες των Αράβων για την άλγεβρα μεταβιβάστηκαν στην Ιταλία. Αυτό συνέβαλλε στην αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος για τα έργα των αρχαίων Ελλήνων αλλά και για τις τεχνικές της άλγεβρας Αράβων στοχαστών. Μια καινούρια εποχή για τα μαθηματικά ξεκινούσε.

Η περίοδος που ακολούθησε χαρακτηρίζεται από το μεγάλο ενδιαφέρον για την ναυσιπλοΐα και το εμπόριο. Τα μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν για την αντιμετώπιση προβλημάτων σχετικά με αυτές τις δραστηριότητες. Ο **Γαλιλαίος** και ο **Κοπέρνικος** βοήθησαν προς αυτή την κατεύθυνση αλλά ταυτόχρονα έφεραν κλονισμό στα θεμέλια της εκκλησίας, αποδεικνύοντας την ασημαντότητα της Γης. Ο **Viette** ήταν ο πρώτος που εισήγαγε συστηματικό αλγεβρικό συμβολισμό εργαζόμενος πάνω στην θεωρία εξισώσεων. Οι εργασίες των **Pacioli**, και έπειτα των **Cardano, Tartaglia** και **Ferrari** έδωσαν αλγεβρικές λύσεις σε κυβικές και τεταρτοβάθμιες εξισώσεις. Μεγάλη ήταν και η συμβολή του **Napier** με την ανακάλυψη των λογαρίθμων και την επέκταση της υπολογιστικής δύναμης των μαθηματικών, αλλά η σημαντική ώθηση τον 17<sup>ο</sup> Αιώνα δόθηκε από τον **Καρτέσιο** με την αλγεβροποίηση της γεωμετρίας στην οποία συνέβαλλε και ο **Fermat**, οποίος μαζί με τον **Pascal** ξεκίνησαν την μελέτη των πιθανοτήτων, της ανάλυσης αλλά και της θεωρίας αριθμών. Η απόδειξη του *τελευταίου θεωρήματος του Fermat* ταλάνιζε έως πρόσφατα την μαθηματική κοινότητα.

Η περίοδος αυτή δίνει τη θέση της καταρχάς στην «ηρωική περίοδο των μαθηματικών» και έπειτα στον «χρυσό αιώνα των μαθηματικών», το 19<sup>ο</sup> αιώνα, που αποτελούν την εποχή των σύγχρονων μαθηματικών.

### ***Σύγχρονα Μαθηματικά***

Ο 18<sup>ος</sup> και 19<sup>ος</sup> αιώνας αποτελούν μαζί με την Ελληνική, τις πιο σημαντικές εποχές των μαθηματικών. Θεμελιώθηκαν σημαντικές ιδέες για τα μαθηματικά και έγιναν σπουδαίες ανακαλύψεις αλλά και αναθεωρήσεις παλαιότερων πεποιθήσεων. Ο 18<sup>ος</sup> Αιώνας αποτελεί τον χρυσό Αιώνα της ανάλυσης. Το ενδιαφέρον για την χρησιμότητα των μαθηματικών αυξανόταν. Μετά τις αρχικές εργασίες των πρωτεργατών του απειροστικού λογισμού **Newton** και **Leibniz** αλλά και του **Bernoulli** τη σκυτάλη παίρνουν οι **Euler**, **Mac Laurin**, και **Taylor** (σειρές συναρτήσεων, δυναμοσειρές). Ο **Euler**, ο σημαντικότερος μαθηματικός αυτού του αιώνα, ασχολήθηκε με πολλούς τομείς (τριγωνομετρία, θεωρία αριθμών) και ανακάλυψε καινούριους (λογισμός μεταβολών, διαφορική γεωμετρία). Ο **Laplace** τελειοποιεί τη θεωρία πιθανοτήτων και την ουράνια μηχανική. Στα χέρια του **Lagrange** η ανάλυση τελειοποιείται και εφαρμόζεται στη μηχανική. Η γεωμετρία παίρνει ώθηση από τις μελέτες των **Clairot** και **Mogne**, και οι εργασίες του **D'Alembert** δίνουν ώθηση στο λογισμό και τις διαφορικές εξισώσεις. Γενικά σε αυτόν τον αιώνα έγινε μεγάλη εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων πάνω στις άλλες επιστήμες, μηχανική, αστρονομία, οπτική κ.ά. Αυτό παρακινούσε τους μαθηματικούς για παραγωγή γνώσης, χωρίς πολλές φορές να γίνεται κάποια βαθύτερη κατανόηση. Αυτό θα δούμε ότι είχε συνέπειες τα επόμενα χρόνια.

Ο 19ος αιώνας χαρακτηρίζεται από σημαντικές και καθοριστικές αλλαγές στα μαθηματικά. Η βιομηχανική επανάσταση υποβοηθά αυτή την ώθηση. Αναπτύσσονται τόσο οι γνώριμοι κλάδοι των μαθηματικών αλλά εμφανίζονται και καινούριοι, όπως η άλγεβρα, μετά την θεωρία του **Galois**. Η γεωμετρία μετά την ανακάλυψη της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας αλλάζει κατεύθυνση. Ακόμα, η ανάλυση, με την εισαγωγή της θεωρίας των μιγαδικών και την ανάπτυξη των συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων, λαμβάνει μια άλλη μορφή.

Μέχρι τις αρχές αυτού του αιώνα τα όρια μεταξύ ανάλυσης και γεωμετρίας ήταν δυσδιάκριτα. Οι **Cauchy** και **Weirstrass** με τις εργασίες τους στα όρια και το λογισμό, θεμελιώνουν την ανάλυση, τη διαφοροποιούν από τη γεωμετρία και θέτουν τις βάσεις για την αριθμητικοποίηση της.

Η ανακάλυψη της θεωρίας ομάδων από τους **Galois** και **Abel**, η ανακάλυψη της μη αλγεβρικής δομής από τον **Hamilton** και η επέκταση στους πίνακες από το **Cayley** αλλά και η μορφή του μεγάλου **Gauss** με την απόδειξη του θεμελιώδους Θεωρήματος της άλγεβρας, ώθησαν τον κλάδο της άλγεβρας. Ο σπουδαίος **Gauss** συνέβαλλε στην ανάπτυξη της διαφορικής γεωμετρίας, της ανάλυσης, της θεωρίας αριθμών αλλά και άλλων επιστημών (αστρονομία, φυσική).

Σημαντική ήταν και η συνεισφορά του **Cantor**, ο οποίος εφηύρε τη θεωρία συνόλων, η οποία ήταν η βάση πάνω στην οποία χτίστηκαν τα σύγχρονα μαθηματικά, και μαζί με τους **Dedekind**, **Peano** και **Weirstrass** έθεσαν τα θεμέλια των πραγματικών αριθμών. Ο **Boole** διώχνει από την λογική το πέπλο της μεταφυσικής και την εντάσσει στα καθαρά μαθηματικά, πράγμα στο οποίο συνέτεινε αργότερα και ο **Frege**.

Όμως το πιο σημαντικό επίτευγμα – καινοτομία του αιώνα αυτού αποτελεί η ανακάλυψη γύρω στο 1829 της πρώτης μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι προσπάθειες που είχαν ξεκινήσει από το 150μ.Χ από τον **Κλαύδιο Πτολεμαίο**, για την απόδειξη του 5<sup>ου</sup> αιτήματος του Ευκλείδη, μα κατέληγαν σε αποτυχίες ή σε σφάλματα. Έτσι οι **Gauss**, **Bolyai** και **Lobatchevski**, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, διατύπωσαν την άποψη ότι το 5<sup>ο</sup> αίτημα είναι ανεξάρτητο από τις υποθέσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας, και έτσι δημιουργήθηκαν γεωμετρίες χωρίς αυτό το αίτημα που ονομάστηκαν **μη Ευκλείδειες γεωμετρίες**. Αργότερα οι **Klein**, **Cayley**, **Poincare** και **Beltrami**, απέδειξαν και θεμελίωσαν τις απόψεις των παραπάνω. Τη δική του μη Ευκλείδεια γεωμετρία θεμελίωσε και ο **Riemann** ο οποίος ήταν ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς αυτού του αιώνα, και η συμβολή του στην θεωρία ολοκλήρωσης υπήρξε καθοριστική.

Η δημιουργία της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας ήταν ίσως ο δεύτερος μεγάλος σταθμός μετά τους αρχαίους Έλληνες και επέφερε πολλές συνέπειες στα μαθηματικά ,καθώς όπως αναφέρει ο *Wilder* :

*« απέκτησαν (τα μαθηματικά) μια ελευθερία που συνοδεύονταν από την πεποίθηση ότι δεν δεσμεύονταν πια από κάποιο ιδεατό ή εξωτερικό κόσμο και μπορούσε κάποιος να δημιουργεί μαθηματικές έννοιες χωρίς τους περιορισμούς που επιβάλλει ο εμπειρικός κόσμος ή ο ιδεατός κόσμος της αλήθειας».*

Ο 20<sup>ος</sup> αιώνας ξεκινά και ίσως σφραγίζει την μετέπειτα μαθηματική του εξέλιξη από τον **Hilbert**, ο οποίος τόσο με τα 23 άλυτα προβλήματα που έθεσε στο παγκόσμιο συνέδριο μαθηματικών στο Παρίσι το 1900 ως βάση για την περαιτέρω

εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης αλλά όσο και με το έργο του «Θεμέλια της γεωμετρίας», όπου κάνει μία αξιωματική ανάπτυξη της Ευκλείδειας γεωμετρίας, θέτει τις βάσεις μίας νέας αξιωματικής μεθόδου της *τυπικής αξιωματικής μεθόδου*. Έτσι θα ξεκινήσει μια προσπάθεια για αυστηρή φορμαλιστική θεμελίωση όλων των μαθηματικών αλλά και για την αναγκαιότητα της συνέπειας των μαθηματικών αξιωματικών συστημάτων, δηλαδή ότι κάθε τυπικό αξιωματικό σύστημα δεν περιέχει αντιφάσεις. Αυτή η προσπάθεια θα τερματιστεί άδοξα, το 1938, με την απόδειξη του θεωρήματος μη πληρότητας από το **Godel**. Μεγάλη ώθηση επίσης δόθηκε και από την εισαγωγή της έννοιας του απείρου και τις επεκτάσεις του από τον **Cantor** καθώς και της τοπολογίας από τον **Poincare**.

Σήμερα, στην εποχή της πληροφορίας, οι βασικοί κλάδοι των μαθηματικών συνεχίζουν να αναπτύσσονται και να αποκτούν νέους υπό-κλάδους και τα μαθηματικά συνεπικουρούμενα πλέον και από την επιστήμη των υπολογιστών εφαρμόζονται σε όλο και περισσότερες επιστημονικές περιοχές όπως την οικονομία, την βιολογία κ.ά. Παρ'όλα αυτά οι προβληματισμοί που υπήρχαν από τους αρχαίους χρόνους για το τι είναι τα μαθηματικά, τι πρεσβεύουν, τι ξέρουμε για αυτά και γιατί τα ξέρουμε, δηλαδή για την *φύση των μαθηματικών*, έχουν γίνει πιο έντονοι ειδικά μετά τις σημαντικές εξελίξεις ως προς αυτήν τους τελευταίους αιώνες

### **Η φύση των Μαθηματικών**

Στην μακραίωνη διάρκεια της εξέλιξης τους δεν ήταν όλα εύκολα. Και λάθη έγιναν, και ατέλειες υπήρχαν που ανακαλύφθηκαν και διορθώθηκαν, αλλά και σημαντικές αντιθέσεις υπήρξαν, οι οποίες καθόρισαν κατά ένα μεγάλο ποσοστό αυτήν την ίδια την εξέλιξή τους. Ακόμη και σήμερα υπάρχουν αντιθέσεις σχετικά με θεμελιώδη ζητήματα των μαθηματικών καθώς και σχετικά με την ίδια την φύση, την φιλοσοφία τους, αλλά και τον τρόπο διδασκαλίας τους.

### ***Πώς φτάσαμε στο σήμερα.***

Στις απαρχές τους τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων όπως η μέτρηση, η αρίθμηση, η δημιουργία ημερολογίων και η τήρηση οικονομικών εγγράφων. Ήταν δηλαδή χρηστικής φύσης δραστηριότητα της οποίας η γνώση βρισκόνταν στα χέρια των λίγων και ισχυρών. Οι Πυθαγόρειοι χρεώνονται την πρώτη προσπάθεια να αποδοθεί ένα φιλοσοφικό υπόβαθρο στα μαθηματικά

θεωρώντας ότι τα πάντα είναι αριθμοί. Έπειτα από την ανακάλυψη της ασυμμετρίας της διαγωνίου ενός τετραγώνου μοναδιαίας πλευράς, η φιλοσοφία αυτή αναδιοργανώθηκε.

Στην συνέχεια, η Πλατωνική θεωρία, που εξελίχθηκε στην τάση της φιλοσοφίας που ονομάζεται **πλατωνισμός** ή **ρασιοναλισμός**, καταχώρησε τις μαθηματικές έννοιες (Μορφές) σε ένα ιδεατό σύμπαν και τους μαθηματικούς εξερευνητές αυτών των εννοιών. Σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πραγματικά (όχι υλικά) και η ύπαρξή τους δεν εξαρτάται από την γνώση μας για αυτά. Την άποψη αυτή υποστήριζαν κατά τον 18<sup>ο</sup> και 19<sup>ο</sup> αιώνα οι Newton, Leibniz και Descartes.

Ο Αριστοτέλης, μαθητής του Πλάτωνα, με τις απόψεις του ότι τα πράγματα στον φυσικό κόσμο έχουν μορφές αλλά δεν υπάρχει κάποιος χώρος που να ενυπάρχουν συνέβαλε στη συστηματοποίηση του αφαιρετικού - συμπερασματικού τρόπου σκέψης, και την προσθήκη της λογικής. Η θεωρία του Αριστοτέλη αποτελεί τον οδηγό για την ανάπτυξη ενός άλλου φιλοσοφικού κινήματος που αναπτύχθηκε τον 18<sup>ο</sup> αιώνα και αποτέλεσε τον αντίλογο στον ρασιοναλισμό, **τον εμπειρισμό**, τον οποίο υποστήριζαν οι Berkeley, Hume, Reid και **Mill**. Σύμφωνα με αυτήν την άποψη ανακαλύπτουμε τα μαθηματικά γεγονότα μέσα από την εμπειρική έρευνα, ακριβώς όπως τα γεγονότα σε οποιαδήποτε από τις φυσικές επιστήμες.

Η μεταστροφή που έφερε ο Ευκλείδης στη μαθηματική σκέψη ήταν η μετουσίωση της γεωμετρίας από ένα εργαλείο σε ένα λογικό σύστημα ορισμών, και αξιωμάτων. Τα αξιώματα αποτελούν διαισθητικά προφανείς αλήθειες, και κάνοντας χρήση αυτών των αξιωμάτων με την βοήθεια της *παραγωγικής συλλογιστικής* εξάγονται προτάσεις και θεωρήματα τα οποία και αυτά προφανώς θα αποτελούν αλήθειες. Αυτό το μοντέλο συνεχίζει να εφαρμόζεται ακόμη και σήμερα, έχοντας υποστεί κάποια γενίκευση, όπως είδαμε στην ιστορική αναδρομή.

Από τους αρχαίους Έλληνες μέχρι τον 17<sup>ο</sup> αιώνα, όταν οι Newton και Leibniz ανακάλυψαν την Ανάλυση, τα μαθηματικά κινούνταν στο ίδιο σκηνικό. Τότε η μαθηματική επιστήμη ασχολήθηκε και με την κίνηση και τις απειροστές αλλαγές, και αυτή η ενασχόληση ναί μεν δεν άλλαξε το σκοπό των μαθηματικών που παρέμενε πάντοτε η ανακάλυψη της απόλυτης αλήθειας, αλλά την οπτική τους, και αυτό είχε ως αποτέλεσμα την τροφοδότηση των τεχνικών επιστημών για τις μεγάλες ανακαλύψεις που επακολούθησαν. Η αλήθεια που επικαλούνταν τα μαθηματικά πλέον δεν θα αποτελούσε προνόμιο μόνο μιας κλειστής κάστας αλλά θα μπορούσε

να μετουσιωθεί σε κοινωνικό αγαθό, χωρίς όμως να εξετάζεται η λογική βάση και τα θεμέλια στα οποία όλα αυτά στηρίζονταν. Επίσης η πρόοδος αυτήν την περίοδο, πάνω στην βάση των πειραματικών μεθόδων και παρατηρήσεων, των φυσικών επιστημών, ουσιαστικά ενέτεινε την φιλοσοφική διαμάχη μεταξύ ρασιοναλιστών και εμπειριστών, τις διαφορετικές απόψεις των οποίων προσπάθησε να ενοποιήσει στο τέλος του 18<sup>ου</sup> αιώνα ο **Kant**.

Η ανακάλυψη όμως της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας τον 19<sup>ο</sup> αιώνα έδωσε άλλη κατεύθυνση στα μαθηματικά. Ο Lobatchevski, ο Bolyai, και ο Riemman έδειξαν ότι τα αρχικά αξιώματα ενός συστήματος, ακόμη και εάν δεν ήταν διαισθητικά αληθή, οδηγούσαν σε ένα συνεπές σύστημα. Τώρα πια η αλήθεια των μαθηματικών είχε πολλές όψεις. Η ανάγκη πλέον για μια πιο ικανοποιητική διαμόρφωση των θεμελίων των μαθηματικών, και η ανάγκη απεξάρτησης από τα «δεσμά» της Ευκλείδειας γεωμετρίας, φάνταζε επιτακτική.

Αυτό ήταν που προσπάθησαν οι μαθηματικοί του 19<sup>ου</sup> αιώνα, καθώς δόθηκε το έναυσμα για μια ενδοσκόπηση σχετικά με τα θεμέλιά τους και έτσι αναπτύχθηκαν τρεις βασικές διαφορετικές φιλοσοφικές σχολές για την επαναδιατύπωση των θεμελίων των μαθηματικών.

### ***Σύγχρονες φιλοσοφικές προσεγγίσεις***

Οι κλασικές θεωρίες για την φύση της μαθηματικής γνώσης, οι οποίες για μεγάλο χρονικό διάστημα διαμοιράζονταν τις διαφορετικές σκέψεις για την φύση των μαθηματικών ήταν – και είναι – ο **Λογικισμός**, ο **Φορμαλισμός**, και ο **Ιντουισιονισμός**.

Σύμφωνα με τον Λογικισμό, τα μαθηματικά αποτελούν έναν κλάδο της λογικής και όλες οι μαθηματικές έννοιες θα πρέπει να διατυπωθούν με την βοήθεια λογικών εννοιών καθώς και όλες οι προτάσεις των μαθηματικών να αποδειχθούν με την βοήθειά της. Η σχολή αυτή στηρίχθηκε στις εργασίες των Cantor, Dedekind και Weirstrass και στην καινούρια έννοια των απειροσυνόλων. Κύριοι εκπρόσωποι αυτής της θεωρίας είναι οι **Russel**, **Fregge** και **Whitehead**.

Ο Φορμαλισμός είναι εκείνο το δόγμα που θεμελιώθηκε από τον **Hilbert** και ουσιαστικά βλέπει τα μαθηματικά σαν ένα επιδέξιο σχηματισμό συμβόλων χωρίς ερμηνεία που υπακούουν σε ορισμένους κανόνες την τυπική γλώσσα. Αυτά τα συμβολικά συστήματα μπορούν να εφαρμόζονται και στα φυσικά προβλήματα. Το πρόγραμμα που πραγματοποίησε ο Hilbert στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, μπορεί να είχε

άδοξο όπως είδαμε αποτέλεσμα, έθεσε όμως τις νέες βάσεις για την περαιτέρω εξέλιξη των μαθηματικών.

Τέλος ο Ιντουισιονιστές, με ιδρυτή τον **Brouwer** ισχυρίζονται ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι νοητικές κατασκευές και ότι οι μαθηματικές αλήθειες πρέπει να διαπιστωθούν με κατασκευαστικές μεθόδους.

Άλλα πιο σύγχρονα ρεύματα φιλοσοφίας για τα μαθηματικά αποτελούν, οι **θεωρίες του ενσώματου νου** και τα **Ανθρωπιστικά Μαθηματικά**. Σύμφωνα με την πρώτη η μαθηματική σκέψη είναι φυσικό αποτέλεσμα του ανθρώπινου γνωστικού μηχανισμού και υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά δεν υπάρχουν υπό οποιαδήποτε πραγματική έννοια, παρά μόνο στους ανθρώπινους εγκεφάλους όπου και κατασκευάζονται. Για τα ανθρωπιστικά μαθηματικά θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο

### **Ανθρωπιστικά Μαθηματικά.**

Τα μαθηματικά παρότι σήμερα από τους περισσότερους θεωρούνται μια αφηρημένη και ξεκομμένη από την πραγματικότητα επιστήμη αναπτύχθηκαν όπως είδαμε κατά κύριο λόγο από τις προσπάθειες των ανθρώπων να κατανοήσουν, να εξηγήσουν και να τιθασεύσουν, σε αρκετές περιπτώσεις, τον κόσμο που τους περιβάλλει. Έτσι η πρόοδός τους συντελέστηκε σε στενή σχέση με την πρόοδο όλων των άλλων επιστημών και δραστηριοτήτων (οικονομία , φυσική, μηχανική, τεχνολογικά επιτεύγματα κ.ά.).

Υπό αυτή την έννοια τα μαθηματικά μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα στην προσπάθεια κατανόησης της αλήθειας. Η αντικειμενικότητα όμως αυτής της αλήθειας είναι, όπως αποδείχθηκε, σχετική και εξαρτάται από την βάση την οποία τροφοδοτείται (εμπειρία, διαίσθηση, απόλυτη αλήθεια). Έτσι τελικά αυτό που φαίνεται να παίζει τον πιο σημαντικό ρόλο είναι όχι μόνο η γνώση καθεαυτή , αλλά η διαδικασία που ακολουθήθηκε για να την κατακτήσουμε.

Η προσπάθεια, για παράδειγμα, από τους αρχαίους του διπλασιασμού του κύβου με κανόνα και διαβήτη, δεν ξεκίνησε από κάποια ανάγκη πρακτική άλλα από την ανάγκη να είναι συνεπείς με την κοσμοθεωρία τους. Αν και πολύ αργότερα αποδείχθηκε η αδυναμία του εγχειρήματος, αυτό είχε συνεισφέρει τα μέγιστα στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, διαμέσου των προσπαθειών που έγιναν για την απόδειξή του.

Η επιμονή των Πυθαγορείων για την ομορφιά και την τελειότητα, και η μέχρις θεοποίησης ενασχόλησή τους με τους φυσικούς αριθμούς μπορεί να φαινόταν ότι δεν προσφέρει τίποτα σημαντικό στην χρησιμότητα της επιστήμης, αλλά στον αιώνα μας γνώρισε σπουδαίες εφαρμογές όπως για παράδειγμα στην κρυπτογραφία. Έτσι και σύμφωνα με τον *Wilder*:

« Τα μαθηματικά πρόσθεσαν από μόνα τους έννοιες στον λεγόμενο πραγματικό κόσμο , έτσι ώστε το πεδίο εφαρμογών τους να περιλαμβάνει όχι μόνο το φυσικό και το κοινωνικό αλλά και το πολιτιστικό περιβάλλον – δηλαδή ο συνεχώς αυξανόμενος όγκος των μαθηματικών θεωριών που γίνεται από μόνες του τμήμα του πολιτιστικού περιβάλλοντος»,

και επομένως οι ανθρωπιστικές και επιστημονικές πτυχές των μαθηματικών είναι αδιαίρετες.

Σύμφωνα με την άποψη του κινήματος των ανθρωπιστικών μαθηματικών ,με κύριους εκφραστές τους **Ernest, Lakatos** και τους **Hersh** και **Davis**, τα μαθηματικά από την μια είναι ανθρώπινο δημιούργημα, αφορούν δηλαδή ιδέες που έχουμε στο νου μας και από την άλλη, η μαθηματική αλήθεια όπως και οι άλλες αλήθειες μπορούν να είναι λάθος και να επιδέχονται διορθώσεις. Όπως γράφει ο Hersh στον πρόλογο του βιβλίου του “*What is Mathematics Really?*”:

« Αποκηρύττοντας τον Πλατωνισμό και τον Φορμαλισμό, αναγνωρίζοντας δε τους λόγους τους όποιους τους έκαναν να φαίνονται αντίστοιχα ευλογοφανείς, βλέπω ότι από την σκοπιά της φιλοσοφίας τα μαθηματικά θα πρέπει να κατανοηθούν ως ανθρώπινη δραστηριότητα, ένα κοινωνικό φαινόμενο, μέρος της ανθρώπινης κουλτούρας, που αναπτύχθηκαν ιστορικά και έγιναν κατανοητά μόνο μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο.»,

και καταλήγει λέγοντας:

« Υπεραμύνομαι του δικαιώματος να κάνουμε τα μαθηματικά όπως τα κάνουμε. Για να είμαι ειλικρινής , αυτό το βιβλίο γράφτηκε από αγάπη στους μαθηματικούς και ευγνωμοσύνη στους δημιουργούς τους »

Όπως είδαμε τα μαθηματικά έχουν μια πλούσια ιστορία και εξελίχθηκαν μαζί με τον πλανήτη μας και τους ανθρώπους του. Εξέφρασαν τις αγωνίες τους και υπήρξαν συμπαραστάτες στην υλική και πνευματική πρόοδό τους. Οδηγός πάντοτε υπήρξε η εύρεση της αλήθειας, της παντοτινής ή της προσωρινής. Αυτήν την εξέφρασαν τα διάφορα φιλοσοφικά ρεύματα των μαθηματικών. Οι διάφορες αλήθειες είναι τα λιμάνια που περνά το πλοίο που λέγεται μαθηματικά. Το σε ποιο λιμάνι θα

κατέβουμε, προσπαθούν να μας το πουν οι διάφορες θεωρίες. Ίσως τελικά σημασία, και εδώ, να έχει μόνο το ταξίδι, και η αγαθή πρόθεση της ανεύρεσης της αλήθειας. Εξάλλου στο ταξίδι μας ίσως συναντήσουμε καινούρια, άγνωστα λιμάνια.

## Βιβλιογραφία

- Clawson, C (2005). *Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών*. Κέδρος.
- Davis, P.J. & Hersch, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία*. Τροχαλία.
- Eves, H. (1997). *Foundations and fundamental concepts of Mathematics*. Dover.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics*. Oxford University press.
- Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*. Gutenberg.
- Wilder, R. (1986). *Η εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών*. Open University.

