

Σχεδιάγραμμα Μαθήματος
Μάθημα: Εισαγωγή στη Συνδυαστική (Επιλογής)
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Χειμερινό εξάμηνο ακαδημαϊκού έτους 2019-2020

Διδάσκων: Δημητρίου Βασίλειος, διδάκτωρ Στατιστικής & Επιχειρησιακής Έρευνας

E-mail: vasdimi@math.auth.gr ή dimitriou.vassilis@gmail.com

ιστοσελίδα: <http://users.auth.gr/vasdimi>

Πληροφορίες Μαθήματος:

Προπτυχιακό μάθημα επιλογής, 1^ο εξάμηνο (χειμερινό)

Ημέρες/ώρες μαθήματος: Δευτέρα 18:00-20:00, Παρασκευή 16:00-18:00

(ΑΜΦ 2: Το μικρό Αμφιθέατρο στο κτήριο Α (ΣΤΕΦ), στο χώρο του πρώην ΤΕΙ)

Προτεινόμενο σύγγραμμα μαθήματος:

Κούτρας Μάρκος Β. *Εισαγωγή στη συνδυαστική Β'* Έκδοση Unibooks 2006. Κωδικός στον Εύδοξο: **59396613**

Επιπλέον βιβλιογραφικά συγγράμματα:

Μωϋσιάδης Χρόνης Θ. *Συνδυαστική απαρίθμηση*. Ζήτη Πελαγία & Σια Ι.Κ.Ε. 2002. Κωδικός στον Εύδοξο: **11285**

Χαραλαμπίδης Χαράλαμπος Α. *Συνδυαστική*, ΤΕΥΧΟΣ Ι. Σ.ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ & ΣΙΑ Ι.Κ.Ε. 2000. Κωδικός στον Εύδοξο: **45399**

Ύλη και σκοπός του μαθήματος:

Το μάθημα «Εισαγωγή στη Συνδυαστική» περιλαμβάνει την μεθοδολογία ανάπτυξης τεχνικών εύρεσης του πλήθους των στοιχείων ενός συγκεκριμένου (πεπερασμένου) συνόλου, χωρίς να απαιτείται η πλήρης καταγραφή των στοιχείων των υπό μελέτη συνόλων. Η χρησιμότητά τους αναδεικνύεται ιδιαίτερα στη μελέτη συνόλων με μεγάλο πλήθος στοιχείων. Αυτές οι τεχνικές είναι γνωστές ως **μέθοδοι απαρίθμησης** και αποτελούν το κύριο αντικείμενο της **Συνδυαστικής**. Με τη βοήθεια των μεθόδων απαρίθμησης υπολογίζεται το πλήθος των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων ή υποσυνόλων τους, τα οποία έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, χωρίς να γίνει καταμέτρηση (Η τέχνη να μετράς χωρίς μέτρημα (Μωϋσιάδης, 2002))

Η ύλη του μαθήματος ταυτίζεται με το περιεχόμενο του συγγράμματος *Εισαγωγή στη Συνδυαστική* (Κούτρας, 2006).

Στόχος του μαθήματος είναι η εξοικείωση των φοιτητών με τη χρήση των βασικών μεθόδων απαρίθμησης της Συνδυαστικής και της ενσωμάτωσής τους στην επίλυση προβλημάτων.

Εξέταση - Βαθμολογία:

Η τελική εξέταση του μαθήματος θα είναι γραπτή, εφ' όλης της ύλης κατά την εξεταστική περίοδο, και θα περιλαμβάνει ασκήσεις που συνδέονται με τις παραδόσεις του μαθήματος. Η εξεταστέα ύλη ταυτίζεται με την διδακτέα ύλη.

Ενδεικτικό πρόγραμμα διδασκαλίας του Μαθήματος /εβδομάδα

- **1^η εβδομάδα**

Στόχοι του μαθήματος και επεξήγηση του τρόπου διεξαγωγής και εξέτασης του μαθήματος. Εισαγωγή στις βασικές αρχές απαρίθμησης. Εισαγωγικά προβλήματα. Επίλυση προβλημάτων με εύρεση αναδρομικής σχέσης, δημιουργία αντιστοιχιών, με τη βοήθεια της πολλαπλασιαστικής αρχής. Ασκήσεις. Προτεινόμενη βιβλιογραφία.

- **2^η εβδομάδα**

Οι αρχές απαρίθμησης: Πολλαπλασιαστική, Προσθετική, Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, Αρχή περιστερώννα (Dirichlet). Αντιπροσωπευτικές ασκήσεις-παραδείγματα επίλυσης με την κάθε αρχή.

- **3^η εβδομάδα**

Διατάξεις-Συνδυασμοί-Μεταθέσεις. Ορισμοί. Παραδείγματα. Τύποι πλήθους διατάξεων. Τύπος πλήθους συνδυασμών. Πλήθος επαναληπτικών συνδυασμών. Παραδείγματα ασκήσεων.

- **4^η εβδομάδα**

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων. Παραδείγματα επίλυσης. Κατανομές σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά:

- k διακεκριμένα σφαιρίδια σε n διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1 ($1 \leq k \leq n$)
- k διακεκριμένα σφαιρίδια σε n διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞
- k όμοια σφαιρίδια σε n διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1 ($1 \leq k \leq n$)
- k όμοια σφαιρίδια σε n διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞

Πλήθος κατανομών k σφαιριδίων σε n διακεκριμένα κελιά. Τύπος πλήθους επαναληπτικών συνδυασμών.

- **5^η εβδομάδα**

Διατάξεις-συνδυασμοί. Βασικές σχέσεις. Αναγωγικές σχέσεις. Αναγωγική (αναδρομική) σχέση για $\binom{n}{k}$, ($1 \leq k \leq n$). Τρίγωνο Pascal. Κατακόρυφη αναγωγική σχέση. Διαγώνια αναγωγική σχέση. Άθροιση κατά δευτερεύουσες διαγώνιες. Αναγωγική σχέση για διατάξεις. Συμμετρική ιδιότητα του $\binom{n}{k}$. Ασκήσεις.

- **6^η εβδομάδα**

Σύνθετες ασκήσεις-ασκήσεις ανακεφαλαίωσης στις Διατάξεις-Συνδυασμούς.

- **7^η εβδομάδα**

Άσκηση-Τύπος Cauchy. Διαιρέσεις-Διαμερίσεις. Εφαρμογές. Πλήθος διαιρέσεων και διαμερίσεων. Ασκήσεις.

• **8^η εβδομάδα**

Πλήθος ακέραιων λύσεων γραμμικής εξίσωσης. Το βασικό πρόβλημα: η λύση της $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ (1) υπό περιορισμούς. Πλήθος λύσεων της (1) με $x_i \in \{0,1\}$. Πλήθος λύσεων της (1) με $x_i \geq 0$. Πλήθος ακέραιων λύσεων της (1) με $x_i \geq s_i$. Πλήθος ακέραιων λύσεων της (1) με $x_i \leq m_i$. Διατυπώσεις σε σφαιρίδια-κελία. Παρατηρήσεις. Πλήθος ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, s_i \leq x_i \leq m_i$. Πλήθος ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k, x_i \geq 0$. Παράδειγμα. Ασκήσεις.

• **9^η εβδομάδα**

Γενικευμένα παραγοντικά. Διωνυμικοί συντελεστές. Σχέση Καθοδικών-Ανοδικών Παραγοντικών. Γεννήτριες ακολουθιών. Η γεννήτρια της $\alpha_k = 1$. Η γεννήτρια της $\alpha_k = \binom{v}{k}$. Η γεννήτρια της $\alpha_k = \left[\begin{matrix} v \\ k \end{matrix} \right]$. Βασικές γεννήτριες. Διωνυμικό Πολυωνυμικό Θεώρημα.

• **10^η εβδομάδα**

Υπολογισμός αθροισμάτων. Αθροίσματα τύπου $\sum_{\kappa=0}^v f(\kappa) \binom{v}{\kappa} \rho^\kappa$. Παράδειγμα.

Αθροίσματα τύπου $\sum_{\kappa=0}^v \frac{f(\kappa)}{(\kappa+1) \cdot \dots \cdot (\kappa+r)} \binom{v}{\kappa} \rho^\kappa$. Παράδειγμα. Σειρές τύπου $\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(\kappa) \rho^\kappa$, $|\rho| < 1$.

• **11^η εβδομάδα**

Υπολογισμός αθροισμάτων. Ο γενικός τύπος του Cauchy. Παράδειγμα. Αθροίσματα τύπου $\sum_{\kappa=0}^v f(\kappa) \binom{r}{\kappa} \binom{s}{v-\kappa}$ με $f(\kappa)$ πολυώνυμο. Αθροίσματα τύπου $\sum_{\kappa=0}^v \frac{f(\kappa)}{(\kappa+1) \cdot \dots \cdot (\kappa+r)} \binom{r}{\kappa} \binom{s}{v-\kappa}$. Αθροίσματα σε περιττούς ή άρτιους δείκτες. Αθροίσματα με συμμετρία $\binom{v}{\kappa} = \binom{v}{v-\kappa}$. Παράδειγμα. Μη τυπικά αθροίσματα.

• **12^η εβδομάδα**

Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για $v=2$ σύνολα. Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για $v=3$ σύνολα. Γενική αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού. Πόρισμα. Ασκήσεις. Γεννήτριες συνδυασμών. Παραδείγματα-ασκήσεις.

• **13^η εβδομάδα**

Γεννήτριες συνδυασμών και διατάξεων. Γενική διάταξη εύρεσης πλήθους διατάξεων με περιορισμούς. Ανασκόπηση-ανακεφαλαίωση του μαθήματος. Επαναληπτικές ασκήσεις.