

Σενάριο για τη διδασκαλία της εξίσωσης κύκλου και εφαπτόμενης κύκλου (με τη χρήση του λογισμικού Sketchpad)

Ταυτότητα του σεναρίου.

- **Συγγραφέας:** Λιανός Δημήτριος
- **Γνωστική περιοχή των μαθηματικών:** Αναλυτική Γεωμετρία.
- **Θέματα:**
 1. Εξίσωση κύκλου ακτίνας ρ , με κέντρο την αρχή των αξόνων.
 2. Εξίσωσης εφαπτομένης κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ σε σημείο $A(x_1,y_1)$.
 3. Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ .
 4. Επίλυση προβλημάτων πάνω στον κύκλο.
 5. Εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου.

Σκεπτικό της δραστηριότητας

- **Βασική ιδέα.** Η βασική ιδέα που με οδήγησε στο σχεδιασμό αυτού του διδακτικού σεναρίου είναι μέσα από ένα “παιχνίδι αναζήτησης” οι μαθητές να ανακαλύψουν την εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ και στη συνέχεια να οδηγηθούν στη μορφή της εξίσωσης της εφαπτομένης. Με την βοήθεια του λογισμικού οπτικοποιούν την μεταβολή της εξίσωσης του κύκλου $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$ καθώς μετακινούν τον κύκλο στο επίπεδο και τέλος να εμπλέκονται στην επίλυση προβλημάτων με τη χρήση του λογισμικού.

Η εμπειρία μας δείχνει πως υπάρχει μια αδυναμία κατανόησης της εξίσωσης κύκλου και ένα μεγάλο ερωτηματικό για το πώς προέκυψε η εξίσωση. Γενικά οι μαθητές έχουν μια αδυναμία στην κατασκευή σχημάτων που θα τα βοηθήσει στην επίλυση προβλημάτων.

Αποφάσισα να κάνω ένα διδακτικό πείραμα. Να πραγματοποιήσω τη διδασκαλία του κύκλου σε τρία τμήματα με τον κλασικό τρόπο και σε ένα τμήμα να αναπτύξω το κύκλο χρησιμοποιώντας το εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας Geometry Sketchpad και να αναπτύξω το παρών σενάριο εργασίας.

- **Προστιθέμενη αξία.**

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο, φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Η παράγραφος του κύκλου παρουσιάζεται στους μαθητές μέσα από αποδείξεις χωρίς οι μαθητές να μπαίνουν σε διαδικασίες αναζήτησης και ανακάλυψης. Με τη βοήθεια του λογισμικού επιχειρείται μια διαφορετική προσέγγιση του κύκλου όπου οι μαθητές επιλέγοντας διάφορα σημεία στο επίπεδο θα ανακαλύψουν τις εξισώσεις, κύκλου, εφαπτομένης κύκλου και κύκλου με κέντρο διαφορετικό από την αρχή των αξόνων.

Αξιοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού θα κατασκευάσουν σχήματα όπου θα έχουν τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού, θα μπου σε διαδικασίες να σχεδιάσουν ίχνη σημείων που θα τους οδηγήσει στην ανακάλυψη γεωμετρικού τόπου.

Γίνεται μια προσπάθεια μετάβασης από τη δασκαλοκεντρική – μετωπική διδασκαλία σε μια πιο μαθητοκεντρική διδασκαλία κατά την οποία οι ΤΠΕ χρησιμοποιούνται ως εργαλείο όπου ο εκπαιδευτικός παίζει το ρόλο του συνερευνητή και εκμαιεύει νέες ιδέες σε τυχόν αδιέξοδα των μαθητών.

- **Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα που αφορούν τη μελέτη του κύκλου και τη λύση προβλημάτων.**

Η φορμαλιστική θεώρηση των εξισώσεων του κύκλου και της εφαπτομένης κύκλου δημιουργεί σύγχυση στον μαθητή ο οποίος τις μαθαίνει μηχανικά, φορμαλιστικά χωρίς να εμβαθύνει σ' αυτές.

Πλαίσιο εφαρμογής.

- **Σε ποιους απευθύνεται.**
Το σενάριο προτείνεται να εφαρμοστεί στη Β' Λυκείου
- **Χρόνος υλοποίησης.**
Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται τουλάχιστον 2 διδακτικές ώρες.
- **Χώρος υλοποίησης.** Οι μαθητές θα εργαστούν αποκλειστικά στο Εργαστήριο των Η/Υ σε ομάδες των δύο, τριών ατόμων.

- **Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών.**

Οι μαθητές γνωρίζουν τον τρόπο υπολογισμού της απόστασης δύο σημείων στο Καρτεσιανό επίπεδο μέσα από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος, την εξίσωση ευθείας, ακτίνα – διάμετρο κύκλου, κατασκευή κύκλου, και κατασκευή εφαπτομένης κύκλου.

- **Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία.**

Σχετικά με τα τεχνολογικά μέσα, θα πρέπει να υπάρχει ένας Η/Υ για κάθε δύο ή τρεις μαθητές με εγκατεστημένο το λογισμικό Geometer's Sketchpad. Πρέπει οι Η/Υ να έχουν κάποιες ελάχιστες επιδόσεις (ταχύτητα, μνήμη, κλπ.) ώστε να μη γίνεται δύσκολη και αργή η εκτέλεση του προγράμματος.

Οι μαθητές επιπλέον, θα χρειαστούν φύλλα εργασίας, χαρτί για πρόχειρο και στυλό για να μπορούν να καταγράφουν τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματά τους.

- **Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης.**

Τα δύο σενάρια έχουν σχεδιαστεί να διεξαχθούν στο εργαστήριο υπολογιστών, όπου οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες των 2-3 ατόμων, δουλεύουν μπροστά στον υπολογιστή. Κάθε ομάδα συμπληρώνει τα φύλλα εργασίας και καταγράφει τη μέθοδο επίλυσης που ακολούθησε. Οι ρόλοι στις ομάδες εναλλάσσονται για να έχουν οι μαθητές τη δυνατότητα χρήσης και ενασχόλησης με το λογισμικό.

- **Στόχοι της δραστηριότητας.**

- A. Διδακτικοί και γνωστικοί στόχοι.**

1. Να μπορούν να κατασκευάζουν την εξίσωση κύκλου όταν είναι γνωστά οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα και αντίστροφα να μπορούν να χαράζουν κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα όταν είναι γνωστή η εξίσωση του.

2. Να είναι σε θέση να κατασκευάζουν την εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου γνωστής ακτίνας με κέντρο την αρχή των αξόνων και να μπορούν να τη χαράζουν.

3. Να μπορούν να ερμηνεύσουν ένα αλγεβρικό αποτέλεσμα σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο παρατηρώντας τη συμμεταβολή μιας γεωμετρικής κατάστασης σε σχέση με την αλγεβρική έκφραση της εξίσωσης κύκλου και της εξίσωσης εφαπτομένης.

4. Να διαμορφώσει στρατηγικές για την αντιμετώπιση και την επίλυση απλών μαθηματικών προβλημάτων.

5. Η εμπλοκή των μαθητών στην εύρεση γεωμετρικού τόπου, ενισχύει την κριτική τους σκέψη καθώς απαιτεί από τη μεριά τους διερεύνηση και πειραματισμό που είναι διαπιστωμένο ότι ενισχύει την δημιουργία εικασιών, τον έλεγχο τους και την διατύπωση κανόνων και γενικεύσεων.

B. Κοινωνικό-πολιτισμικοί στόχοι.

Μέσα από την εργασία ανά δύο ή τρεις καλλιεργείται η συνεργατικότητα και η επικοινωνία μεταξύ τους αλλά και με τον εκπαιδευτικό, ο οποίος παρεμβαίνει υποβοηθητικά θέτοντας κατάλληλα ερωτήματα στους μαθητές και ανταποκρίνεται στις ερωτήσεις τους. Επίσης δίνοντας διάφορους ρόλους στους μαθητές κάθε ομάδας μαθαίνουν ο ένας από τον άλλο, συζητούν τις ενέργειες και τις νέες γνώσεις που παίρνουν και η διδασκαλία των μαθηματικών γίνεται ένα βιωματικό παιχνίδι.

Ανάλυση της δραστηριότητας.

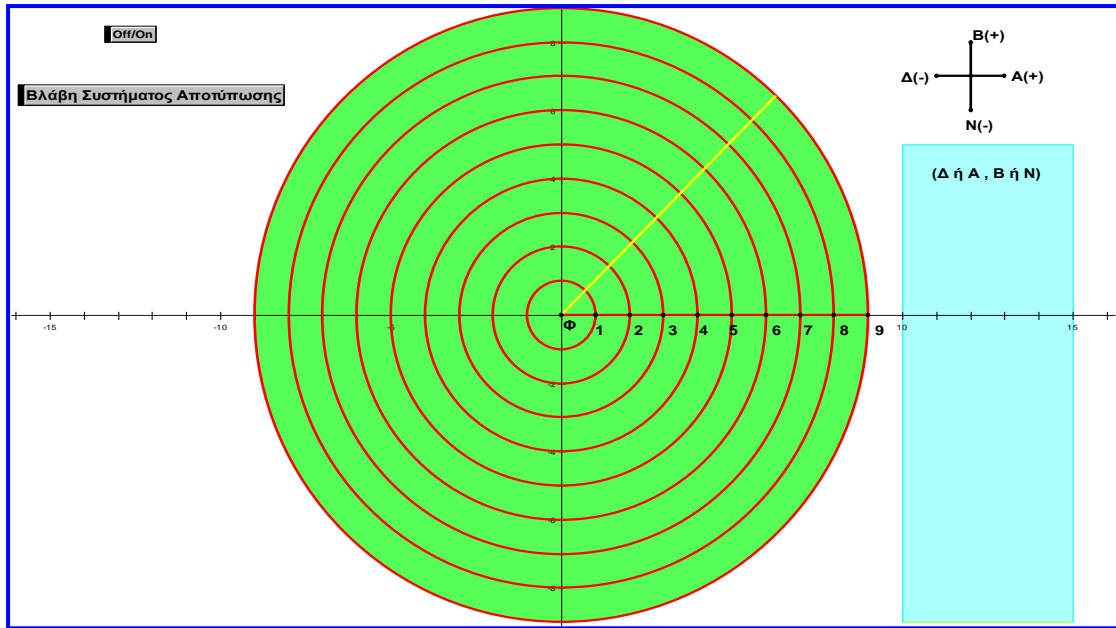
Η δραστηριότητα περιλαμβάνει δύο σενάρια.

ΣΕΝΑΡΙΟ 1^ο

- **Φάση 1^η** (Εύρεση Εξίσωσης Κύκλου - 1 διδακτική ώρα)

Βήμα 1^ο

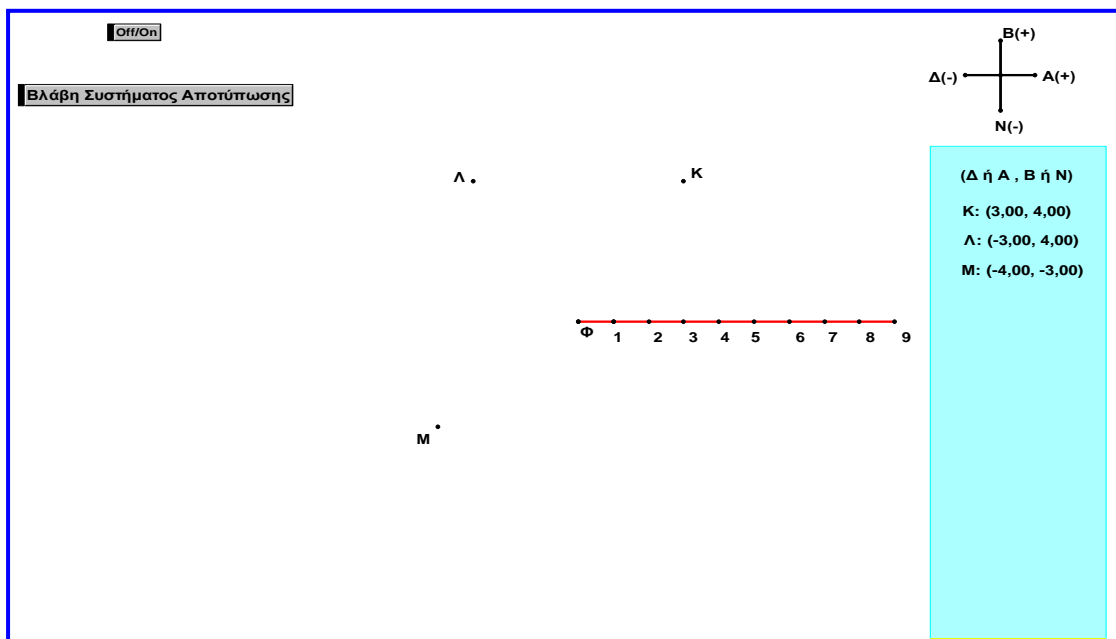
Δίνεται στους μαθητές το [φύλλο εργασίας 1](#) το οποίο αφού το διαβάσουν προσεκτικά καλούνται να ανοίξουν το αρχείο [Σενάριο 1.gsp](#) (Φάση 1α)



Γίνεται μια προσπάθεια με την κατασκευή αυτή, αξιοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού να εμπλέξω τους μαθητές σε ένα παιχνίδι αναζήτησης της εξίσωσης του κύκλου. Η ανακαλυπτική μέθοδος προσφέρει σαφώς δομημένες γνωστικές εμπειρίες στους μαθητές.

Βήμα 2^ο

Ζητείται από τους μαθητές να κάνουν κλικ στο κουμπί *Βλάβη Συστήματος Αποτύπωσης*. Στην οθόνη τους θα δουν το παρακάτω σχήμα:



Καλείται κάθε ομάδα μέσα από πειράματα και συλλογισμούς να βρει την είσοδο και στη συνέχεια να ανακαλύψει τη σχέση που υπάρχει

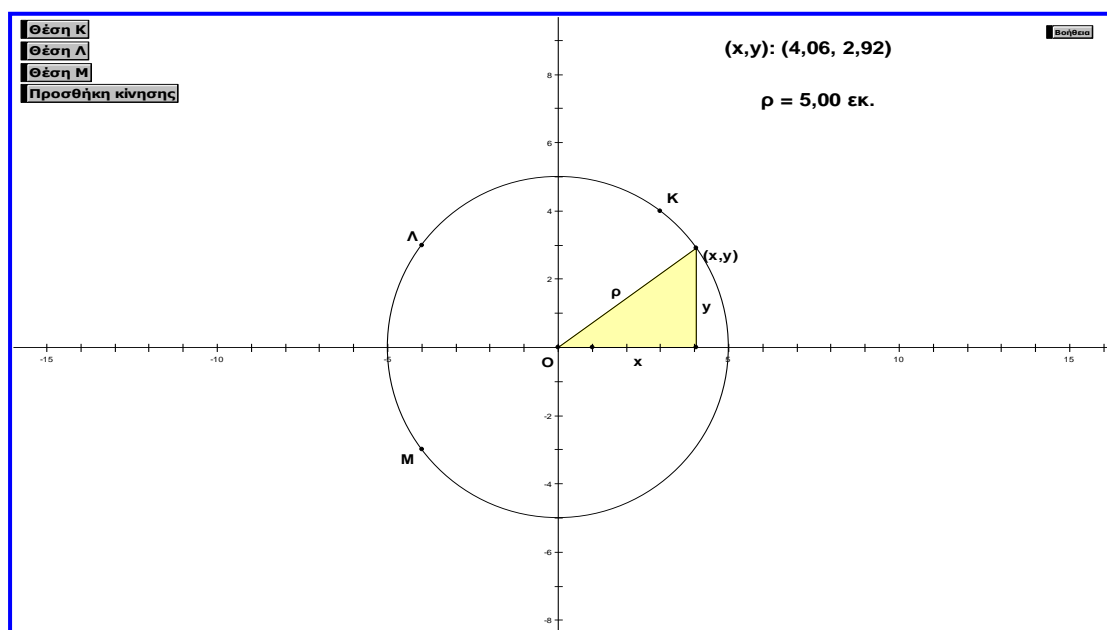
μεταξύ των x , y , ρ . Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ζητείται από κάθε ομάδα να μεταφέρει στις υπόλοιπες ομάδες τους συλλογισμούς της και τη μέχρι τώρα πορεία τους, ώστε αν κάποια ομάδα είναι σε αδιέξοδο να βοηθηθεί από τις υπόλοιπες ομάδες, να συνεχίσει την αναζήτηση της και όχι να μείνει στο περιθώριο.

Στο βήμα αυτό αναμένουμε οι μαθητές να σκεφτούν ότι για να βρεθεί η είσοδος αρκεί να βρεθεί η απόσταση του φυλακίου από οποιοδήποτε από τα 3 αποτυπωμένα σημεία (είναι γνωστή η απόσταση της κάθε εισόδου από το φυλάκιο) χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Επειδή οι μαθητές μπορούν να βρουν εύκολα την είσοδο είτε κατασκευάζοντας κύκλο με κέντρο το σημείο Φ ο οποίος να διέρχεται από τα σημεία K , Λ , M είτε μετρώντας με τη βοήθεια του λογισμικού οποιαδήποτε από τις αποστάσεις ΦK , $\Phi \Lambda$, ΦM , θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να παρέμβει και να εξηγήσει στους μαθητές ότι ο φύλακας δεν έχει στη διάθεση του ούτε οθόνη ούτε το λογισμικό παρά μόνο τα στίγματα (συντεταγμένες) των 3 σημείων και ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό για να χαράξουν ευθύγραμμα τμήματα και να υπολογίσουν τυχών αλγεβρικές παραστάσεις που θα προκύψουν μέσα από συλλογισμούς που θα κάνουν.

Στην περίπτωση που οι μαθητές δεν καταφέρουν να βρουν τη σχέση που συνδέει τα x , y , ρ χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα προχωράμε στο Βήμα 3.

Βήμα 3^ο

Ζητείται από τους μαθητές να κάνουν κλικ στην ετικέτα *Φάση 1β*.

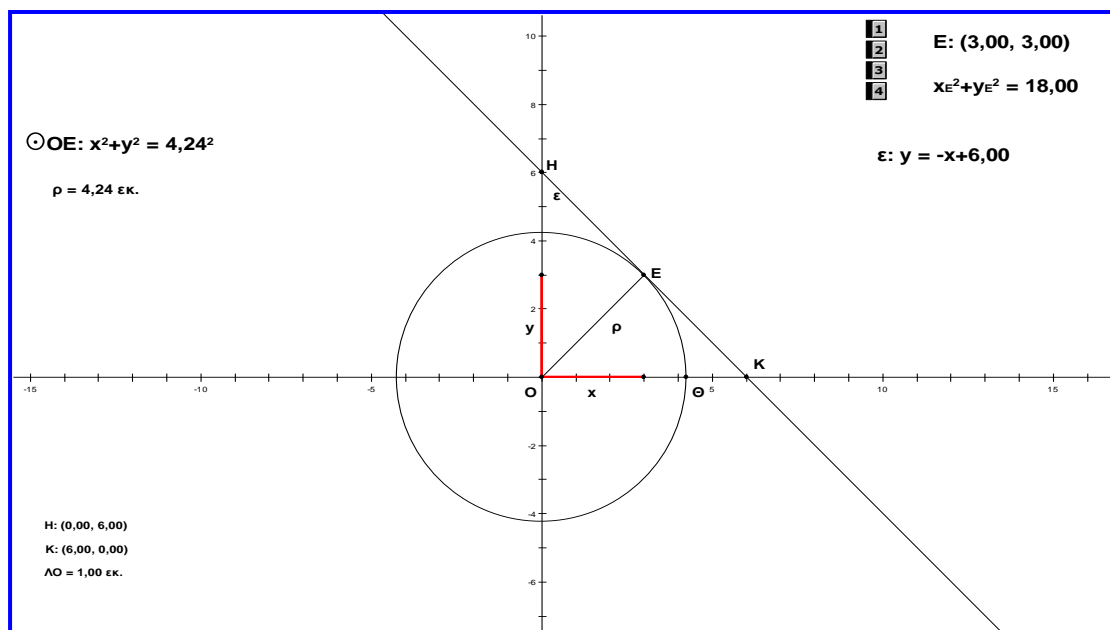


Το βήμα αυτό θα βοηθήσει τους μαθητές να σκεφτούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και να το επαληθεύσουν για τα 3 δοσμένα σημεία. Έχοντας τη δυνατότητα της δυναμικής μετακίνησης του τυχαίου σημείου (x,y) πάνω στον κύκλο μπορούν να το επαληθεύσουν για οποιοδήποτε άλλο σημείο. Επίσης υπάρχει η δυνατότητα της προσθήκης κίνησης του σημείου (x,y) και του κομπού «βοήθειας». Τελικά αναμένετε να γενικεύσουν ότι το τυχαίο σημείο με συντεταγμένες (x,y), κύκλου με κέντρο (0,0) και ακτίνα ρ , κινείται σε κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ που είναι και ο στόχος της Φάσης 1.

• Φάση 2^η (1 διδακτική ώρα)

Βήμα 1^ο (Εύρεση Εξίσωσης Εφαπτομένης)

Δίνεται το [φύλλο εργασίας 2](#) και ζητείται από τους μαθητές να κάνουν κλικ στην ετικέτα Φάση 2α.



A. Ζητείται από τους μαθητές να πατήσουν τα κουμπιά 1, 2, 3, 4 και σε κάθε περίπτωση να συμπληρώσουν στο φύλλο εργασίας με τη βοήθεια του λογισμικού τις συντεταγμένες του σημείου E, την εξίσωση του κύκλου, την εξίσωση ευθείας ϵ και στην τελευταία στήλη την εξίσωση εφαπτομένης την οποία θα τη φέρουν στη μορφή $Ax+By=\Gamma$ όπου $\Gamma=\rho^2$ μετασχηματίζοντας κατάλληλα την εξίσωση της ευθείας ϵ (πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα όλα τα μέλη με κάποιον αριθμό).

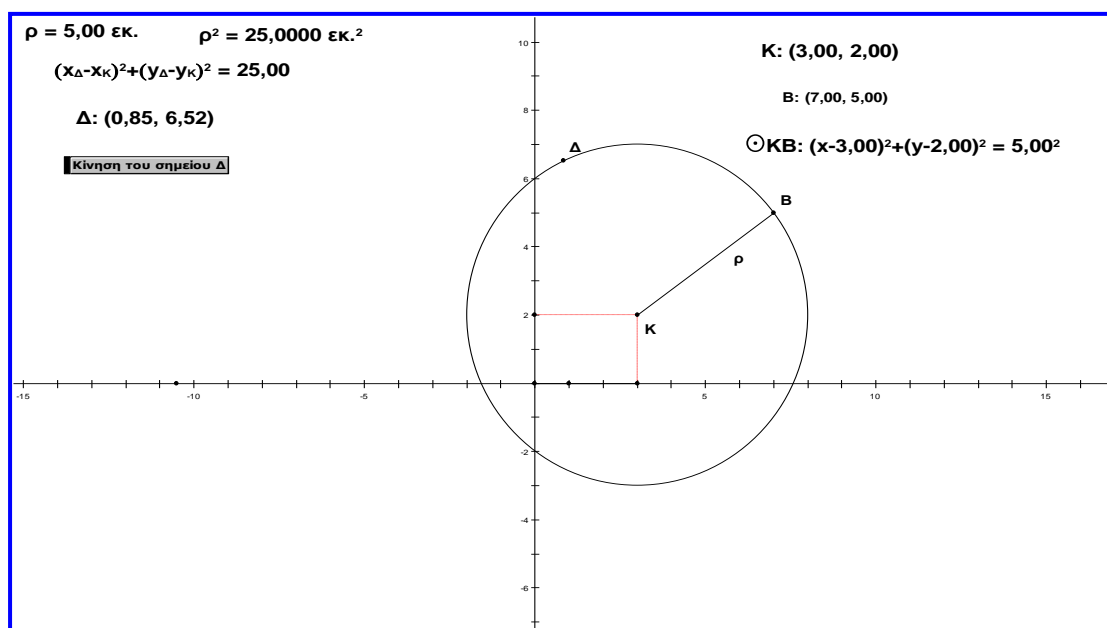
B. Ζητείται από τους μαθητές κινώντας το σημείο E στο επίπεδο να επιλέξουν και άλλες θέσεις και να συμπληρώσουν τις γραμμές στο φύλλο

εργασίας. Έχω ενεργοποιήσει στο μενού Γράφημα την “τοποθέτηση σημείων” ώστε το σημείο E να παίρνει σε πρώτη φάση μόνο ακέραιες συντεταγμένες για να διευκολυνθούν οι μαθητές στις πράξεις όταν κάνουν τον μετασχηματισμό της ευθείας ε.

Γ. Τέλος ζητείται από τους μαθητές να γενικεύσουν κάνοντας μια εικασία για τη μορφή της εξίσωσης της εφαπτομένης σε σημείο (x_0, y_0) του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και να συμπληρώσουν τη μορφή της στην τελευταία γραμμή του φύλλου εργασίας.

• **Βήμα 2^ο** (Εύρεση Εξίσωσης Κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$)

Δίνεται το [φύλλο εργασίας 3](#) και ζητείται από τους μαθητές να κάνουν κλικ στην ετικέτα Φάση 2β. Σε καθένα από τα επόμενα βήματα ζητάμε από την κάθε ομάδα να μεταφέρει στις υπόλοιπες, τις παρατηρήσεις της σχετικά με το πώς μεταβάλλεται η εξίσωση του κύκλου καθώς μετακινείται το κέντρο του. (Στα βήματα Α, Β, Γ, Δ που ακολουθούν έχω ενεργοποιήσει στο μενού Γράφημα την “ τοποθέτηση σημείων ”)



Α. Ζητείται από τους μαθητές να κάνουν κλικ πάνω στην ακτίνα του κύκλου και να την μετακινήσουν (δεξιά-αριστερά) ώστε το κέντρο K να είναι πάνω στον άξονα x'x και να συμπληρώσουν στο φύλλο εργασίας 4 κέντρα και τις αντίστοιχες εξισώσεις κύκλου.

Β. Ζητείται από τους μαθητές να κάνουν κλικ πάνω στην ακτίνα του κύκλου να μετακινήσουν το κέντρο K στην αρχή των αξόνων και στη συνέχεια να την μετακινήσουν (πάνω-κάτω) ώστε το κέντρο να είναι πάνω

στον άξονα $y'y$ και να συμπληρώσουν στο φύλλο εργασίας τέσσερα κέντρα και τις αντίστοιχες εξισώσεις κύκλου.

Γ. Ζητείται από τους μαθητές να κάνουν κλικ πάνω στην ακτίνα του κύκλου να μετακινήσουν το κέντρο K ώστε να επιλέξουν από τρία κέντρα για καθένα από τα τέσσερα τεταρτημόρια και να τα καταγράψουν στο φύλλο εργασίας.

Δ. Ζητείται από τους μαθητές να μετακινήσουν το κέντρο K σε διάφορες θέσεις του επιπέδου και στη συνέχεια να πάρουν διάφορες θέσεις για το σημείο B και να γίνει μια συζήτηση μεταξύ των ομάδων για το μεταβάλλεται η εξίσωση κύκλου όταν μεταβάλλεται το κέντρο και η ακτίνα. Επίσης μπορούν να πατήσουν το κουμπί *Κίνηση του σημείου Δ* και να παρατηρήσουν στο αριστερό πάνω μέρος της οθόνης ότι το σημείο Δ επαληθεύει την εξίσωση κύκλου καθώς το σημείο κινείται πάνω στον κύκλο.

Ε. Ζητείται από τους μαθητές να κάνουν μια εικασία (Γενίκευση). Ποιά είναι η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ

Επέκταση του σεναρίου

Σαν επέκταση της δραστηριότητας:

1. Θα μπορούσαν να τεθούν στους μαθητές και άλλα προβλήματα για εργασία στο σπίτι, τα οποία θα τα προσεγγίσουν αρχικά με ένα ελεύθερο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (GeoGebra) και στη συνέχεια θα δώσουν τη λύση του προβλήματος στο «χαρτί».
2. Θα μπορούσε να γίνει η παρουσίαση και των υπόλοιπων κωνικών τομών παραβολή, έλλειψη, υπερβολή. Με κατάλληλα φύλλα εργασίας μπορούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές, να ανακαλύψουν τις ιδιότητες των κωνικών τομών όπως συμμετρίες, ορθογώνιο βάσης, εκκεντρότητα, ασύμπτωτες, ανακλαστική ιδιότητα κλπ.

Με τον τρόπο αυτό η γνώση κατασκευάζεται και δεν αποκαλύπτεται με μετωπική (δασκαλοκεντρική) διδασκαλία.

Επιπλέον, οι μαθητές δεν μένουν στο κεφάλαιο αυτό στη στείρα ασκησιολογία των κωνικών τομών με τις ατέλειωτες πράξεις, αλλά συνδέουν την Γεωμετρία με την Άλγεβρα των κωνικών τομών.