ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

Η ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει την ΕΟΚ, την περίπτωση δηλαδή όπου ένα σώμα διατηρεί σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του σταθερή την ταχύτητά του. Τί γίνεται όμως όταν η ταχύτητα ενός σώματος μεταβάλλεται;

Όταν η ταχύτητα ενός σώματος μεταβάλλεται (αλλάζει), λέμε ότι κάνει **μεταβαλλόμενη κίνηση.** Από τις μεταβαλλόμενες κινήσεις ενδιαφέρον παρουσιάζουν αυτές στις οποίες η ταχύτητα μεταβάλλεται *με σταθερό ρυθμό* ή όπως λέμε ότι μεταβάλλονται *ομαλά* – αυτές οι κινήσεις ονομάζονται **ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις.**

Σε μια ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση μπορεί να συμβαίνουν 2 πράγματα μόνο: είτε να *αυξάνεται* ομαλά η ταχύτητα (**επιταχυνόμενη** κίνηση – περίπτωση 2α) είτε να *μειώνεται* ομαλά η ταχύτητα (**επιβραδυνόμενη** κίνηση – περίπτωση 2β)

Εμείς φέτος θα ασχοληθούμε με κινήσεις οι οποίες γίνονται πάνω σε ευθεία τροχιά – είναι *ευθύγραμμες* – θα μελετήσουμε δηλαδή τις **Ευθύγραμμες Ομαλά Μεταβαλλόμενες Κινήσεις**.

2α. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η δεύτερη κίνηση που θα εξετάσουμε φέτος είναι η **Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση.** Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση σημαίνει:

- ⇒ η κίνηση γίνεται πάνω σε μια ευθεία γραμμή (ευθύγραμμη)
- ⇒ η ταχύτητα ΔΕΝ παραμένει σταθερή αλλά αυξάνει με σταθερό ρυθμό (ομαλά επιταχυνόμενη). Τί σημαίνει όμως ότι αυξάνει *με σταθερό ρυθμό*;

- Όταν ένα σώμα εκτελεί ΕΟΚ, τότε σε ίσους χρόνους διανύει ίσα διαστήματα.
- Όταν όμως ένα σώμα εκτελεί ΕΟΕΚ, τότε σε ίσους χρόνους ΔΕΝ διανύει ίσα διαστήματα, αλλά αυξάνει την ταχύτητά του κατά το ίδιο σταθερό ποσό Δυ. Αυτά γίνονται περισσότερο κατανοητά με το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω ένα σώμα που ξεκινά από ακίνητο και επιταχύνει συνεχώς με σταθερό ρυθμό. Αν καταγράψουμε σε ένα πίνακα το χρόνο, την ταχύτητά του και τη θέση του θα έχουμε:

t (s)	υ (m/s)	x (m)
0	0	0
5	10	25
10	20	100
15	30	225
20	40	400
25	50	625
30	60	900

users.sch.gr/dimror

Παρατηρούμε ότι κάθε 5 δευτερόλεπτα το σώμα αυξάνει την ταχύτητά του κατά 10m/s ή ότι έχει *ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας* $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{10m/s}{5s}$ = 2 m/s^2

Αυτόν ακριβώς το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας τον ονομάζουμε **επιτάχυνση,** τον συμβολίζουμε με το γράμμα **α** (από το αγγλικό acceleration=επιτάχυνση) και τον μετράμε σε **m/s^2**

Κάνοντας τις ίδιες παραδοχές όπως και στην ΕΟΚ (ότι δηλαδή για t=0 είναι x=0, μόνο που τώρα ισχύει και υ=0) θα έχουμε:

$$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{(\upsilon - 0)}{t - 0} = \frac{\upsilon}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{\upsilon}{t}$$

Επειδή α=υ/t λύνοντας ως προς υ έχουμε $\boxed{\upsilon = \alpha\ t}$, σχέση που αποτελεί και το νόμο της ταχύτητας για την ΕΟΕΚ.

Προσέξτε ότι η επιτάχυνση **α** στην ΕΟΕΚ είναι σταθερή – ΔΕΝ αλλάζει με το χρόνο (αφού όπως και στο παράδειγμά μας, κάθε δευτερόλεπτο η ταχύτητα αλλάζει κατά το ίδιο Δυ=2m/s)

Η επιτάχυνση α ως ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας

Στο 4^{ο} φυλλάδιο είχαμε δει ότι για κάθε μέγεθος που αλλάζει/μεταβάλλεται με το χρόνο, μπορεί να οριστεί ο ***Ρυθμός Μεταβολής*** του $\frac{\Delta}{\Delta t}$**.**

- ✓ Έτσι, στην περίπτωση της ΕΟΚ (όπου αλλάζει με το χρόνο μόνο η μετατόπιση x και όχι η ταχύτητα υ) ορίστηκε ο ρυθμός μεταβολής της *μετατόπισης* και ονομάστηκε ***ταχύτητα*** $\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
- ✓ Τώρα, στην περίπτωση της ΕΟΕΚ (όπου αλλάζει με το χρόνο και η μετατόπιση x και η ταχύτητα υ) ορίστηκε ο ρυθμός μεταβολής της *ταχύτητας* και ονομάστηκε ***επιτάχυνση*** $a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$

Σημειώστε επίσης ότι επειδή η επιτάχυνση ορίζεται μέσω της ταχύτητας – που είναι διανυσματικό μέγεθος – προκύπτει και αυτή διανυσματικό μέγεθος. Κανονικά θα πρέπει να γράφουμε δηλαδή $\vec{a}$ αντί για *α*. Η ίδια σύμβαση όμως που έχουμε κάνει για την ταχύτητα (αν η ταχύτητα έχει κατεύθυνση προς τη θετική φορά είναι +, αλλιώς είναι –) ισχύει και εδώ και στην περίπτωση της επιταχυνόμενης κίνησης η επιτάχυνση α έχει το ίδιο πρόσημο με την ταχύτητα υ.

Στο παραπάνω παράδειγμα παρατηρήσαμε ότι κάθε 5 δευτερόλεπτα αυξάνεται η ταχύτητα κατά 10m/s, ή ότι η επιτάχυνση είναι 2m/s^2. Τι κάνει όμως η μετατόπιση x;
Αν προσέξουμε καλύτερα θα παρατηρήσουμε ότι η μετατόπιση x είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι ισχύει $\boxed{x = ½\ \alpha\ t^2}$, σχέση που αποτελεί και το νόμο της μετατόπισης για την ΕΟΕΚ.

users.sch.gr/dimror

Τέλος, επειδή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης το σώμα έχει *σταθερή επιτάχυνση*, θα ισχύει ότι $\boxed{\alpha = \text{σταθερή}}$ που αποτελεί και το νόμο της επιτάχυνσης για την ΕΟΕΚ και η οποία μπορεί να συμπεριληφθεί στις εξισώσεις κίνησης της ΕΟΕΚ.
(Αντίστοιχα μπορούμε – τώρα που ορίσαμε και την επιτάχυνση – να συμπεριλάβουμε και το νόμο της επιτάχυνσης $\boxed{\alpha = 0}$ στην ΕΟΚ, μιας και η ΕΟΚ είναι κίνηση με σταθερή ταχύτητα, άρα με μηδενική επιτάχυνση)

Έχουμε λοιπόν συγκεντρωτικά:

Εξισώσεις κίνησης στην Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση (χωρίς αρχική ταχύτητα)

$\boxed{\alpha = \text{σταθερή}}$ νόμος επιτάχυνσης

$\boxed{\upsilon = \alpha\, t}$ νόμος ταχύτητας

$\boxed{x = \frac{1}{2}\alpha\, t^2}$ νόμος μετατόπισης

Παράδειγμα:

Ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση 4 m/s^2 και χωρίς αρχική ταχύτητα.
α) να γραφτούν οι εξισώσεις κίνησης
β) να βρεθεί η θέση του σώματος μετά από 2 δευτερόλεπτα από την αρχή της κίνησης καθώς και τί ταχύτητα και τί επιτάχυνση θα έχει εκεί
γ) μετά από 5 δευτερόλεπτα από την αρχή της κίνησης πού θα βρίσκεται το σώμα, τί ταχύτητα και τί επιτάχυνση θα έχει;
δ) μετά από πόσο χρόνο το σώμα θα απέχει 200 m από την αφετηρία της κίνησης;

Λύση:

α) Νόμος επιτάχυνσης: $\alpha = \text{σταθερή} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4\ m/s^2}$
Νόμος ταχύτητας: $\upsilon = \alpha\, t \Rightarrow \boxed{\upsilon = 4\, t}$
Νόμος μετατόπισης: $x = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \Rightarrow \boxed{x = 2t^2}$

β) Για t=2s έχουμε: $x = 2t^2 \Rightarrow x = 2 \cdot 2^2 \Rightarrow x = 8m$, δηλαδή μετά από 2 δευτερόλεπτα κίνησης το σώμα θα απέχει 8m από την αφετηρία (Σημείο Αναφοράς)
Για t=2s έχουμε επίσης: $\upsilon = 4\, t \Rightarrow \upsilon = 4 \cdot 2 \Rightarrow \upsilon = 8m/s$
Επειδή η επιτάχυνση δεν αλλάζει στην ΕΟΕΚ, μετά από t=2s θα παραμένει $\alpha = 4m/s^2$

γ) Για t=5s έχουμε: $x = 2t^2 \Rightarrow x = 2 \cdot 5^2 \Rightarrow x = 50m$, δηλαδή μετά από 5 δευτερόλεπτα κίνησης το σώμα θα απέχει τώρα 50m από την αφετηρία (Σημείο Αναφοράς)
Για t=5s έχουμε επίσης: $\upsilon = 4\, t \Rightarrow \upsilon = 4 \cdot 5 \Rightarrow \upsilon = 20m/s$
Επειδή η επιτάχυνση δεν αλλάζει στην ΕΟΕΚ, μετά από t=5s θα παραμένει $\alpha = 4m/s^2$

δ) Λύνοντας την εξίσωση της μετατόπισης $x = 2t^2$ ως προς t (αφού είναι ο άγνωστός μας τώρα), έχουμε $t = \sqrt{x/2}$ οπότε αντικαθιστώντας όπου x τα 200m έχουμε $t = \sqrt{200/2} \Rightarrow t = \sqrt{100} \Rightarrow t = 10\ s$. Άρα, μετά από 10 δευτερόλεπτα κίνησης, το σώμα θα απέχει 200 μέτρα από την αφετηρία.

users.sch.gr/dimror

Εξάσκηση:
Ένα σώμα κινούμενο με σταθερή επιτάχυνση, διανύει απόσταση 36 m σε χρόνο 3 s.
α) Αφού υπολογιστεί η σταθερή του επιτάχυνση, να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης.
β) Πού θα βρίσκεται το σώμα μετά από 10 s και τί ταχύτητα θα έχει εκεί;
γ) Πότε θα απέχει αυτό το σώμα 100 m από την αφετηρία της κίνησης και τί ταχύτητα θα έχει εκεί;
δ) Κατασκευάστε τα διαγράμματα υ-t και x-t για χρόνους t=1, 2, 3, 4 και 5s

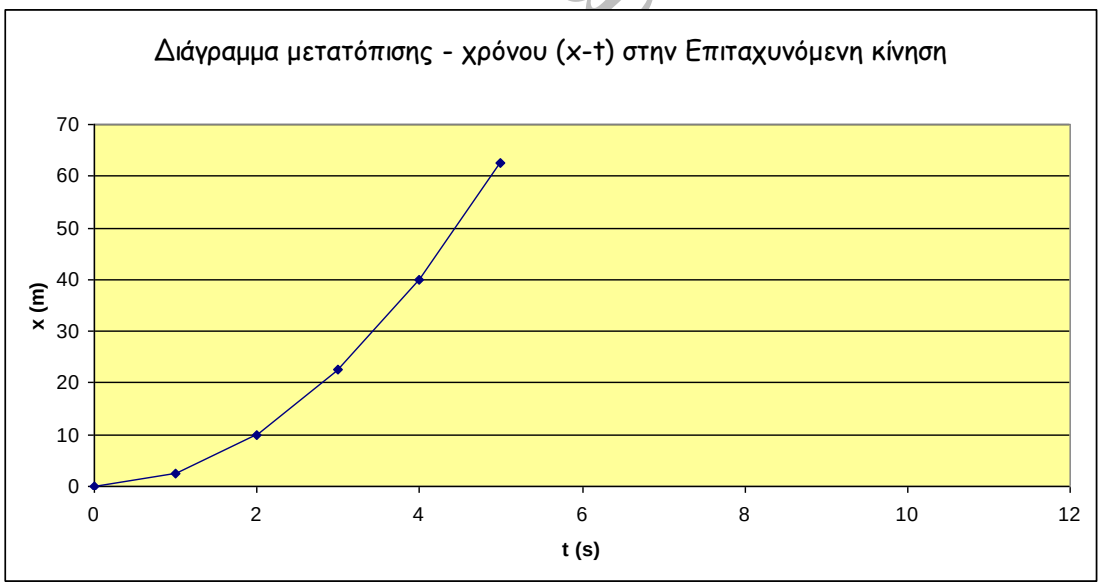
[Απ: α) $\alpha=8m/s^2$, $\upsilon=8t$, $x=4t^2$
β) x=400m, υ=80m/s
γ) t=5 s, υ=40m/s]

gr/dimror

Διαγράμματα κίνησης στην Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

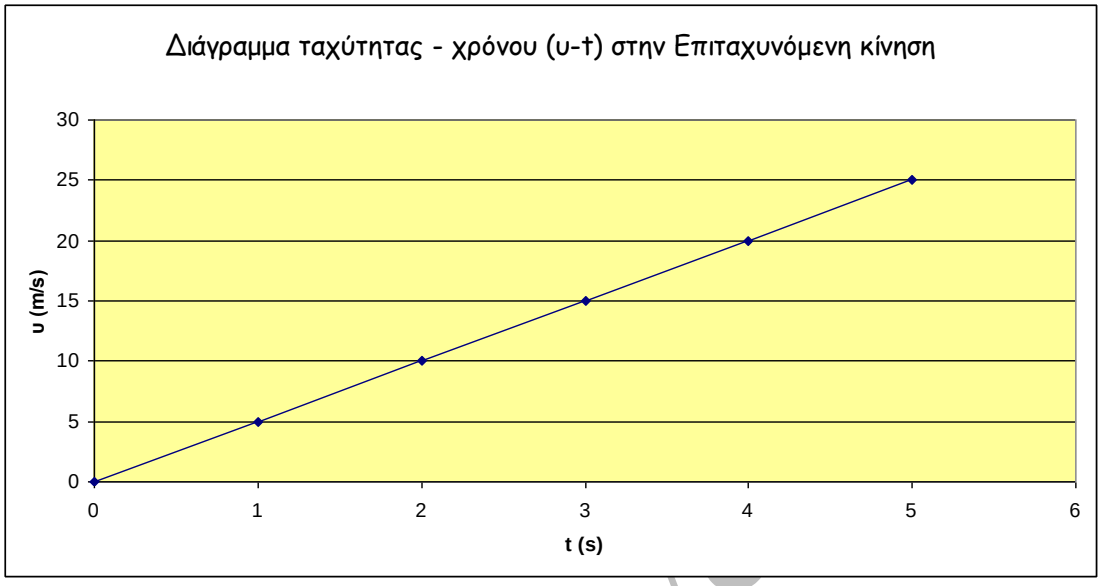
i. Διάγραμμα μετατόπισης-χρόνου (x-t)

Επειδή ο νόμος της μετατόπισης είναι μια συνάρτηση της μορφής $\mathbf{y = a \cdot x^2}$, η γραφική του παράσταση θα είναι μια *παραβολή* που διέρχεται από την αρχή των αξόνων <u>και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω:</u>



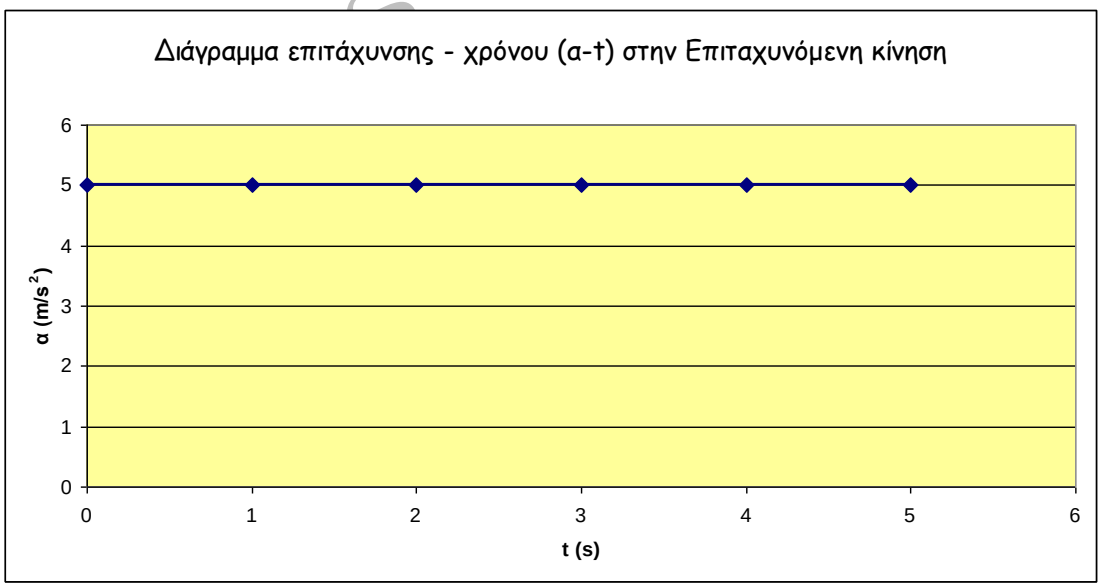
ii. Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου (υ-t)

Επειδή ο νόμος της ταχύτητας είναι μια συνάρτηση της μορφής **y =a·x** , η γραφική του παράσταση θα είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων



iii. Διάγραμμα επιτάχυνσης-χρόνου (α-t)

Επειδή ο νόμος της επιτάχυνσης είναι σταθερής μορφής, (δεν εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή), η γραφική του παράσταση θα είναι μια οριζόντια ευθεία παράλληλη με τον άξονα του χρόνου



- Αν όμως στην αρχή (t=0) όπου το σώμα βρίσκεται στην αφετηρία (x=0) το σώμα έχει ήδη μια αρχική ταχύτητα υ_0 – δεν είναι δηλαδή ακίνητο – τότε οι παραπάνω εξισώσεις μεταβάλλονται ως εξής:

Εξισώσεις κίνησης στην Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση όταν υπάρχει και αρχική ταχύτητα υ_0:	
α = σταθερή	νόμος επιτάχυνσης
$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$	νόμος ταχύτητας
$x = \upsilon_0 t + ½ \alpha t^2$	νόμος μετατόπισης

Παράδειγμα:

Ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση 4 m/s^2 με αρχική ταχύτητα υ_0=5m/s.

α) να γραφτούν οι εξισώσεις κίνησης

β) να βρεθεί η θέση του σώματος μετά από 2 δευτερόλεπτα από την αρχή της κίνησης καθώς και τί ταχύτητα και τί επιτάχυνση θα έχει εκεί

γ) μετά από 5 δευτερόλεπτα από την αρχή της κίνησης πού θα βρίσκεται το σώμα, τί ταχύτητα και τί επιτάχυνση θα έχει;

Λύση:

α) Νόμος επιτάχυνσης: α=σταθερή $\Rightarrow$ $\alpha=4\ m/s^2$

Νόμος ταχύτητας: $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t \Rightarrow \upsilon=5+4t$

Νόμος μετατόπισης: $x = \upsilon_0 t + ½ \alpha t^2 \Rightarrow x=5t+2t^2$

β) Για t=2s έχουμε: $x = 5t+2t^2 \Rightarrow x = 5\cdot2+2\cdot2^2 \Rightarrow x = 18m$, δηλαδή μετά από 2 δευτερόλεπτα κίνησης το σώμα θα απέχει 18m από την αφετηρία (Σημείο Αναφοράς)

Για t=2s έχουμε επίσης: $\upsilon=5+4t \Rightarrow \upsilon=5+4\cdot2 \Rightarrow \upsilon = 13m/s$

Επειδή η επιτάχυνση δεν αλλάζει στην Επιταχυνόμενη κίνηση, μετά από t=2s θα παραμένει $\alpha=4m/s^2$

γ) Για t=5s έχουμε: $x=5t+2t^2 \Rightarrow x = 5\cdot5+2\cdot5^2 \Rightarrow x = 75m$, δηλαδή μετά από 5 δευτερόλεπτα κίνησης το σώμα θα απέχει τώρα 75m από την αφετηρία (Σημείο Αναφοράς)

Για t=5s έχουμε επίσης: $\upsilon=5+4t \Rightarrow \upsilon=5+4\cdot5 \Rightarrow \upsilon = 25m/s$

Επειδή η επιτάχυνση δεν αλλάζει στην Επιταχυνόμενη κίνηση, μετά από t=5s θα παραμένει $\alpha=4m/s^2$

Εξάσκηση:

Ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση 2 m/s^2 και αρχική ταχύτητα υ_0=10 m/s.

α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης.

β) Πού θα βρίσκεται το σώμα μετά από 10 s, τί ταχύτητα και τί επιτάχυνση θα έχει εκεί;

γ) Πού θα βρίσκεται το σώμα μετά από 5 s, τί ταχύτητα και τί επιτάχυνση θα έχει εκεί;

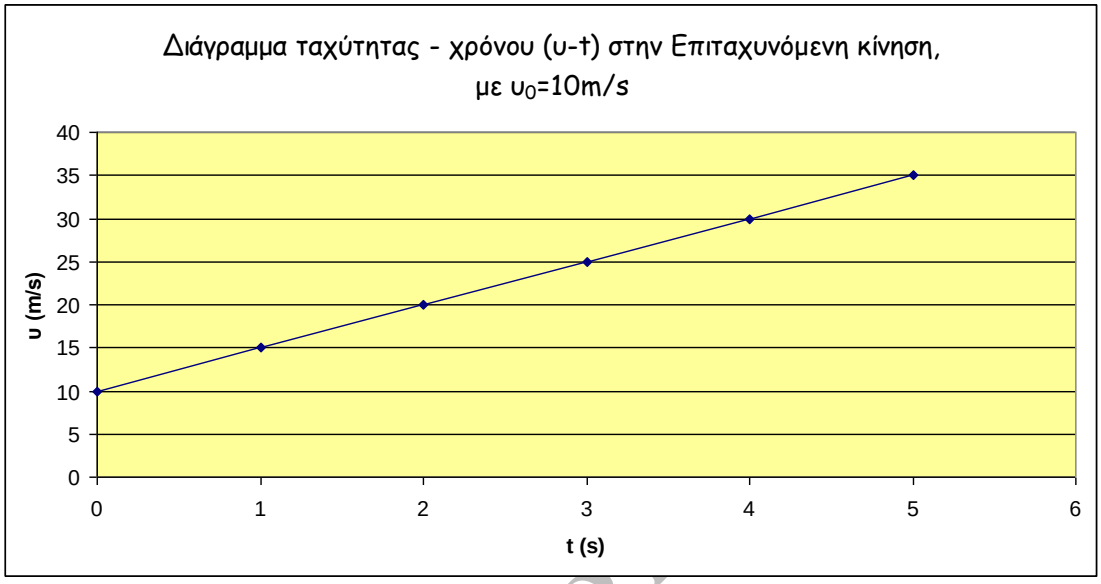
δ) Κατασκευάστε τα διαγράμματα υ-t και x-t για χρόνους t=1, 2, 3, 4 και 5s

[Απ: α) $\alpha=2m/s^2$, $\upsilon=10+2t$, $x=10t+t^2$
β) x=200m, $\upsilon=30m/s$, $\alpha=2m/s^2$
γ) x=75m, $\upsilon=20m/s$, $\alpha=2m/s^2$]

users.sch.gr/dimror

- ✓ Τα διαγράμματα κίνησης στην Επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_0, παραμένουν ουσιαστικά ίδια με αυτά της Επιταχυνόμενης χωρίς αρχική ταχύτητα – η μόνη διαφορά είναι ότι το διάγραμμα της ταχύτητας υ-t απλά μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά το υ_0

Πχ για την κίνηση με εξίσωση ταχύτητα υ = 10 + 5t, το διάγραμμα υ-t είναι το παρακάτω:



Τα υπόλοιπα διαγράμματα (επιτάχυνσης-χρόνου α-t και μετατόπισης-χρόνου x-t) παραμένουν ίδια.

users.sch.gr

- ✓ Θεωρία §1.1.8 και §1.1.9 (χωρίς τις σχέσεις 1.1.8 και 1.1.11) σελ. 50-62 σχολικού βιβλίου
- ✓ Το Θεώρημα Merton στο πράσινο ένθετο σελ.59-60!
- ✓ Πολύ καλά η Εφαρμογή 2 σελ.57-58
- ✓ Ερωτήσεις σελ. 63: 11(Δ), 12(Δ), 14(Δ), 15Γ, 16, 17, 20, 21(Δ), 22, 25(Δ), 31(Δ), 32(Δ), 35, 36
- ✓ Ασκήσεις σελ. 69: 7, 8(Δ), 10, 11*(Δ), 12*, 14*, 15*(Δ), 18*

2β. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΒΡΑΔΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Παραπάνω μελετήσαμε την κίνηση όπου το σώμα επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό α, αυξάνει δηλαδή την ταχύτητά του κατά σταθερό Δυ κάθε δευτερόλεπτο.

Στην περίπτωση όπου το σώμα επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό – δηλαδή μειώνει την ταχύτητά του κατά Δυ κάθε δευτερόλεπτο, η μελέτη είναι παρόμοια, με τις ίδιες εξισώσεις κίνησης, με μόνη διαφορά ότι η επιτάχυνση α τώρα θα είναι αρνητική

Μια δεύτερη παρατήρηση στις επιβραδυνόμενες κινήσεις είναι ότι το σώμα τώρα θα έχει πάντα μια αρχική ταχύτητα υ_0 (λογικό, αφού πώς θα μπορούσε ένα σώμα να μειώσει ταχύτητα αν δεν έχει ταχύτητα;)

Οι εξισώσεις κίνησης της Επιβραδυνόμενης κίνησης λοιπόν τροποποιούνται ως εξής:

Εξισώσεις κίνησης στην Επιβραδυνόμενη κίνηση:

α = σταθερή	($\alpha<0$)	νόμος επιτάχυνσης
$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$		νόμος ταχύτητας
$x = \upsilon_0 t - ½ \alpha t^2$		νόμος μετατόπισης

Παράδειγμα:

Ένα σώμα κινείται με αρχική ταχύτητα υ_0=10m/s όταν αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση α= - 2 m/s^2

α) να γραφτούν οι εξισώσεις κίνησης

β) να βρεθεί η θέση του σώματος μετά από 2 δευτερόλεπτα από την αρχή της κίνησης καθώς και τί ταχύτητα και τί επιβράδυνση θα έχει εκεί

γ) πότε το σώμα θα σταματήσει τελικά και πόσο διάστημα θα έχει διανύσει τότε;

Λύση:

α) Νόμος επιτάχυνσης: α=σταθερή $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha=-2\ m/s^2}$

Νόμος ταχύτητας: $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t \Rightarrow \boxed{\upsilon=10 - 2t}$

Νόμος μετατόπισης: $x = \upsilon_0 t - ½ \alpha t^2 \Rightarrow \boxed{x=10t - t^2}$

β) Για t=2s έχουμε: $x = 10t-t^2 \Rightarrow x = 10\cdot 2 - 2^2 \Rightarrow$ x = 16m, δηλαδή μετά από 2 δευτερόλεπτα επιβράδυνσης το σώμα θα απέχει 16m από την αφετηρία.

Για t=2s έχουμε επίσης: $\upsilon=10 - 2t \Rightarrow \upsilon=10 - 2\cdot 2 \Rightarrow$ υ = 6m/s

Επειδή η επιτάχυνση δεν αλλάζει, μετά από t=2s θα παραμένει α=-2 m/s^2

γ) Όταν το σώμα σταματήσει τελικά, θα έχει ταχύτητα υ = 0. Άρα από την εξίσωση της ταχύτητας θα υπολογίσω αυτό το χρόνο:

$\upsilon = 10 - 2t \Rightarrow 0 = 10 - 2t \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow$ t = 5 s, δηλαδή το σώμα θα σταματήσει μετά από 5 δευτερόλεπτα κίνησης.

Όταν θα σταματήσει, θα έχει διανύσει διάστημα που θα υπολογίσω από την εξίσωση μετατόπισης:

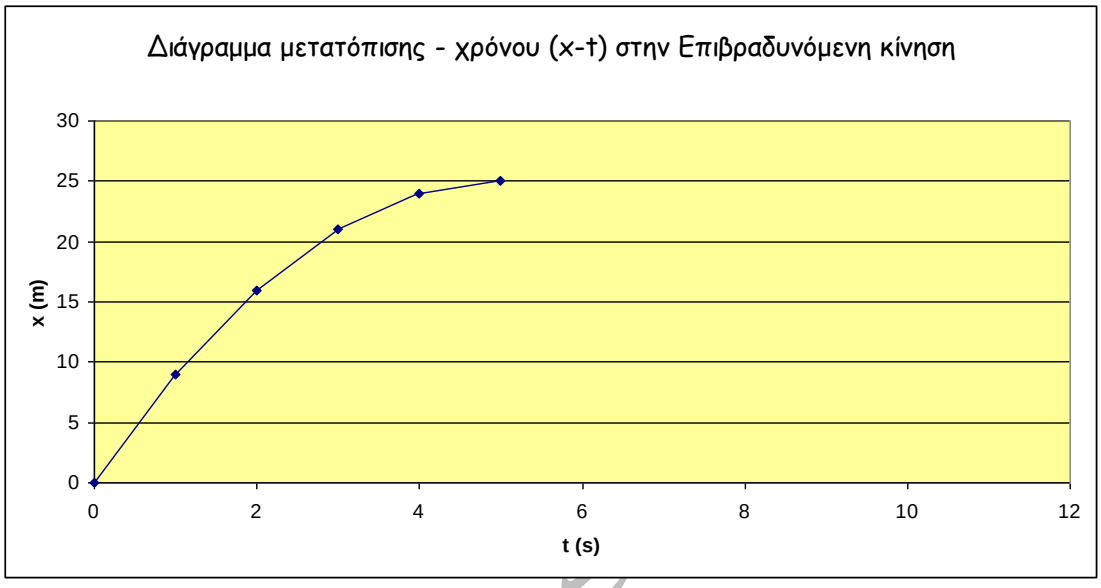
$x=10t - t^2 \Rightarrow (t=5s) \Rightarrow x=10\cdot 5-5^2 \Rightarrow x=50-25 \Rightarrow$ x=25m, άρα το σώμα θα σταματήσει όταν θα έχει διανύσει 25 μέτρα.

users.sch.gr/dimror

Διαγράμματα κίνησης στην Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση

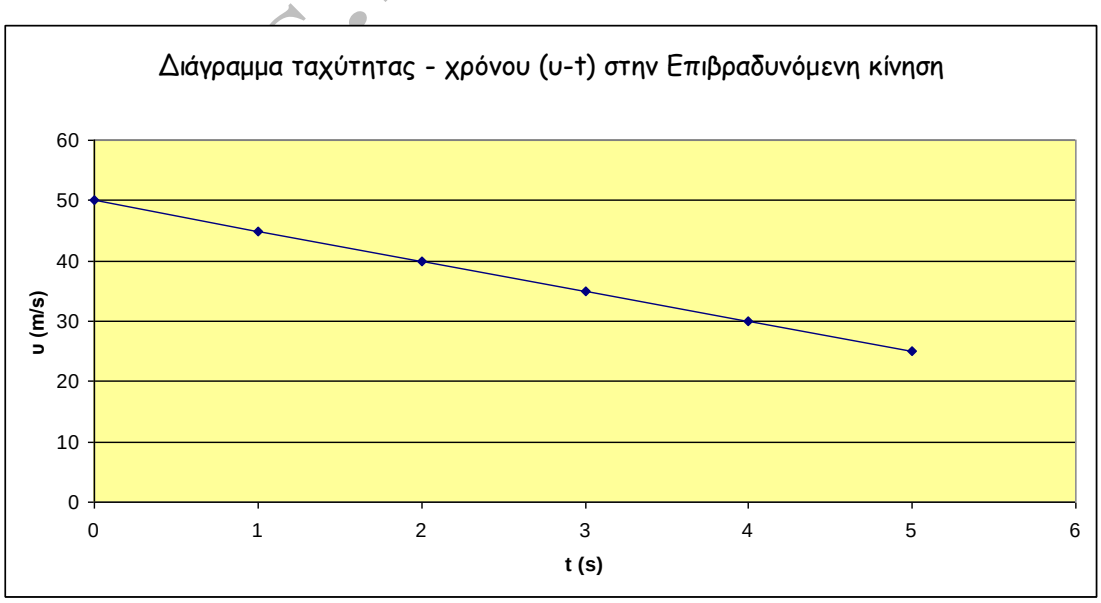
i. Διάγραμμα μετατόπισης-χρόνου (x-t)

Επειδή ο νόμος της μετατόπισης είναι μια συνάρτηση της μορφής $\mathbf{y = b \cdot x - a \cdot x^2}$, η γραφική του παράσταση θα είναι μια *παραβολή* που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.



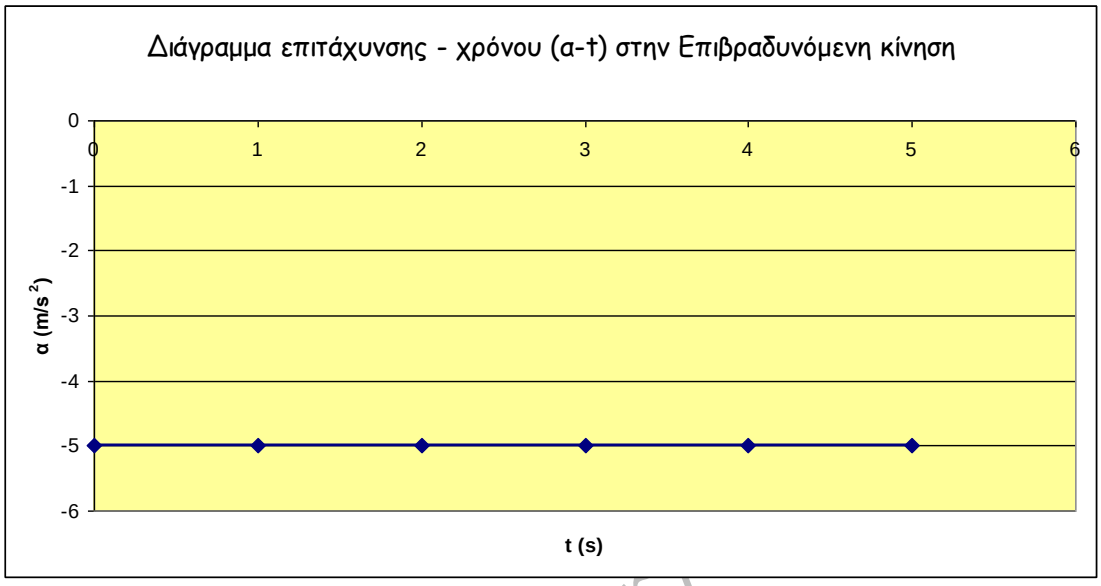
ii. Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου (υ-t)

Επειδή ο νόμος της ταχύτητας είναι μια συνάρτηση της μορφής $\mathbf{y = b - a \cdot x}$, η γραφική του παράσταση θα είναι μια ευθεία που ξεκινά από το υ_0 και κατεβαίνει προς τα κάτω:



iii. Διάγραμμα επιτάχυνσης-χρόνου (α-t)

Επειδή ο νόμος της επιτάχυνσης είναι σταθερής μορφής, (δεν εξαρτάται από το χρόνο δηλαδή), η γραφική του παράσταση θα είναι μια οριζόντια ευθεία παράλληλη με τον άξονα του χρόνου, αλλά κάτω από τον άξονα του χρόνου τώρα (γιατί το α είναι αρνητικό):



users.sch.gr

Ειδικά θέματα στην Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη Κίνηση

1) Κατεύθυνση των διανυσματικών μεγεθών επιτάχυνση ($\vec{\alpha}$) και ταχύτητα ($\vec{\upsilon}$)

Είδαμε ότι η επιτάχυνση α ορίζεται σαν το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας $a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$, όπου παραλείψαμε τα βελάκια στα α και Δυ με τη σύμβαση ότι όταν έχουμε επιτάχυνση (αύξηση ταχύτητας, άρα θετικό Δυ) θα βάζουμε στις εξισώσεις μας το α με θετικό πρόσημο, ενώ όταν έχουμε επιβράδυνση (μείωση ταχύτητας, άρα αρνητικό Δυ) θα βάζουμε αρνητικό πρόσημο στο α. Πάντα όμως το α και το Δυ θα έχουν το ίδιο πρόσημο, άρα και την ίδια κατεύθυνση. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι:

- ✓ Στην μεν <u>επιταχυνόμενη</u> κίνηση, το α και το υ θα έχουν την <u>ίδια</u> κατεύθυνση
- ✓ Στην δε <u>επιβραδυνόμενη</u> κίνηση, το α και το υ θα έχουν <u>αντίθετη</u> κατεύθυνση

2) Ολικός χρόνος ($t_{ολ}$) – ολικό διάστημα ($x_{ολ}$) κίνησης στην επιβραδυνόμενη κίνηση

Σε ένα σώμα που επιβραδύνει μέχρι να σταματήσει τελείως, μπορούμε να υπολογίσουμε τον ολικό χρόνο κίνησης (**$t_{ολ}$**) (το χρόνο δηλαδή από τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνει μέχρι τη στιγμή που σταμάτησε) καθώς και το αντίστοιχο ολικό διάστημα κίνησης (**$x_{ολ}$**) (το διάστημα που διάνυσε μέχρι να σταματήσει) ως εξής:

Αν στο νόμο της ταχύτητας της επιβραδυνόμενης κίνησης $\boxed{\upsilon = \upsilon_0 - \alpha\, t}$ θέσουμε στην τελική ταχύτητα υ=0 (αφού τελικά σταματάει το σώμα), τότε έχουμε:

$0 = \upsilon_0 - \alpha\, t_{ολ} \Rightarrow \boxed{t_{ολ} = \frac{\upsilon_0}{\alpha}}$, όπου **$t_{ολ}$** ο **ολικός χρόνος κίνησης** του σώματος μέχρι να σταματήσει.

Αν τώρα στη συνέχεια, αυτό το $t_{ολ}$ το αντικαταστήσουμε στο νόμο της μετατόπισης της επιβραδυνόμενης κίνησης $\boxed{x = \upsilon_0\, t - ½\, \alpha\, t^2}$, θα βρούμε το $x_{ολ}$:

$$x = \upsilon_0\, t - ½\, \alpha\, t^2 \Rightarrow x_{ολ} = \upsilon_0\, t_{ολ} - ½\, \alpha\, t_{ολ}^2 \Rightarrow x_{ολ} = \upsilon_0 \cdot \left(\frac{\upsilon_0}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\upsilon_0}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x_{ολ} = \frac{\upsilon_0^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\upsilon_0^2}{\alpha^2} = \frac{2\upsilon_0^2}{2\alpha} - \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \boxed{x_{ολ} = \frac{\upsilon_0^2}{2\alpha}},$$

όπου **$x_{ολ}$** το **ολικό διάστημα κίνησης** του σώματος μέχρι να σταματήσει.

<u>Παρατήρηση:</u> για να χρησιμοποιηθούν οι γραμμοσκιασμένες σχέσεις σε άσκηση, θα πρέπει πρώτα να αποδειχθούν.

users.sch.gr/dimror

3) Αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος Merton

Το θεώρημα Merton διατυπώνεται μαθηματικά με τη σχέση

$$\boxed{S = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} t}$$

Αν λοιπόν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε την τελική ταχύτητα υ από το νόμο της ταχύτητας της επιταχυνόμενης κίνησης $\boxed{\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t}$ θα έχουμε:

$S = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} t = \frac{\upsilon_0 + (\upsilon_0 + at)}{2} t = \frac{2\upsilon_0 + at}{2} t = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$, καταλήγουμε δηλαδή στο νόμο της μετατόπισης της επιταχυνόμενης κίνησης $x = \upsilon_0 t + ½ \alpha t^2$, άρα ισχύει και το θεώρημα Merton από το οποίο ξεκινήσαμε αρχικά.

4) Απαλοιφή χρόνου

Σε ασκήσεις όπου δεν δίνεται αλλά και δεν ζητείται χρόνος, μπορούμε να εφαρμόσουμε μαι διαδικασία που λέγεται «απαλοιφή χρόνου». Με την απαλοιφή χρόνου καταλήγουμε σε σχέση της μετατόπισης x συναρτήσει μόνο των ταχυτήτων και της επιτάχυνσης/επιβράδυνσης, χωρίς το χρόνο δηλαδή. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

1. Επιλύουμε το νόμο της ταχύτητας ως προς το χρόνο.
2. Τη σχέση που προκύπτει την αντικαθιστούμε στο νόμο της ταχύτητας.
3. Κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις:

$\boxed{x = \frac{\upsilon^2}{2\alpha}}$	$\boxed{x = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2\alpha}}$	$\boxed{x = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2\alpha}}$
Για την επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα	Για την επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα	Για την επιβραδυνόμενη κίνηση

- ✓ Παρατηρούμε ότι και οι 3 αυτές σχέσεις είναι απαλλαγμένες από το χρόνο t
- ✓ Ειδικά για την τελευταία σχέση της επιβραδυνόμενης, αν το σώμα σταματάει τελικά, καταλήγουμε στη σχέση του ολικού διαστήματος κίνησης $x_{ολ}$

users.sch.gr/dimror

- ✓ Θεωρία §1.1.8 και §1.1.9 (με τις σχέσεις 1.1.8 και 1.1.11) σελ. 50-62 σχολικού βιβλίου
- ✓ Πολύ καλά η Εφαρμογή 1 σελ.57
- ✓ Ερωτήσεις σελ. 63: 13, 23, 24(Δ), 27(Δ), 28(Δ), 30(Δ), 37(Δ), [29, 39, 40 ανύσματα]
- ✓ Ασκήσεις σελ. 69: 9(Δ), 13, 16(Δ), 17, 19 (Δ)