

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ Μονάδες 10
- A.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$; Μονάδες 5
- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
 $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$ Μονάδες 2
- β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 2
- γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών. Μονάδες 2
- δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Μονάδες 2
- ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$ Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

- Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6$ και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$ τότε να βρείτε:
- α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . Μονάδες 6
- β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . Μονάδες 7
- γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$ Μονάδες 6
- δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. Μονάδες 3
- β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 9
- γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{x}{2}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του a . Μονάδες 6
- δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

- Εστω f μια συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^x f(t)dt - 45$
- α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$ Μονάδες 8
- β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι $g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$ Μονάδες 4
- γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε
- i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ Μονάδες 10
- ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1 Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.1 Η $\ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
 Σχολικό βιβλίο, σελ. 235.
- A.2 Σχολικό βιβλίο, σελ. 191.
- B. α. $\rightarrow \Sigma$ β. $\rightarrow \Sigma$ γ. $\rightarrow \Lambda$ δ. $\rightarrow \Lambda$ ε. $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2^ο

- α. $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \Leftrightarrow |i + 2\sqrt{2}| |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+8} |z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

$$\beta. \left. \begin{aligned} |w-(1-i)| &= |w-(3-3i)| \\ \text{Έστω } w &= x+yi, x, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} |x+yi-1+i| = |x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία $\varepsilon: x - y - 4 = 0$

που είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $A(1, -1)$ και $B(3, -3)$.

$\gamma.$ Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ ισούται με την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία (ε) και είναι

$$d(O, \varepsilon) = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$\delta. |z - w| \geq ||z| - |w|| = ||w| - |z|| \geq |2\sqrt{2} - 2| = 2\sqrt{2} - 2$$

Λύνεται και ως εξής:

Η κάθετη ευθεία στην ε από την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση $y = -x$. Τα κοινά της σημεία με τον κύκλο και την ε είναι τα $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ και $N(2, -2)$ αντίστοιχα. Οπότε η ζητούμενη ελάχιστη τιμή είναι η απόσταση

$$(MN) = \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2 + (-\sqrt{2}+2)^2} = \sqrt{2(\sqrt{2}-2)^2} = \sqrt{2}(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2.$$

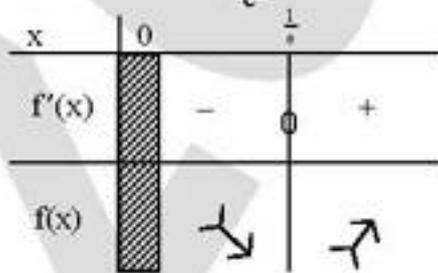
ΘΕΜΑ 3^ο

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \text{ και } f(0) = 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0.$$

$$\beta. \text{ Για } x > 0 \quad f'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}.$$



Η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

$$\text{Για } \Delta_1 = \left[0, \frac{1}{e}\right] \text{ η } f \text{ γνησίως φθίνουσα άρα } f(\Delta_1) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right]$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}, f(0) = 0 \text{ άρα } f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$$

$$\text{Για } \Delta_2 = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \text{ η } f \text{ γνησίως αύξουσα άρα } f(\Delta_2) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty \text{ άρα } f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

$$\text{Άρα το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι } f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

γ. $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \ln e \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow x \ln x - \alpha = 0$. Ορίζουμε $g(x) = f(x) - \alpha$ για $x > 0$ με $g'(x) = f'(x)$.

Άρα η g έχει την ίδια μονοτονία με την f άρα για $\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{e}\right]$ g γνησίως φθίνουσα με $g(\Delta_1) = \left[g\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)\right)$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} - \alpha, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\alpha \text{ άρα } g(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{e} - \alpha, -\alpha\right).$$

Για $\Delta_2 = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ g γνησίως αύξουσα με $g(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e} - \alpha, +\infty\right)$.

Για $-\frac{1}{e} - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{e}$ και $\alpha < 0$ τότε η g έχει 2 θετικές ρίζες.

Για $\alpha > 0$ η g έχει μία θετική ρίζα.

Για $\alpha < -\frac{1}{e}$ η g δεν έχει καμία ρίζα.

Για $\alpha = 0$ η g έχει ρίζα το $x = 1$

Για $\alpha = -\frac{1}{e}$ η g έχει ρίζα το $x = \frac{1}{e}$

δ. Για $x > 0$ η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ $x > 0$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$

$$\text{τ.ω. } f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

$f'(x) = \ln x + 1$ και $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ άρα $f'(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$ άρα για $\xi < x+1$.

$f'(\xi) < f'(x+1)$ άρα $f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Έστω $\int_0^2 f(t) dt = c$ ① τότε $f(x) = c(10x^3 + 3x) - 45$

$$\text{Έχουμε } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [c(10x^3 + 3x) - 45] dx = \left[c \left(\frac{5x^4}{2} + \frac{3x^2}{2} \right) - 45x \right]_0^2 = c \left(\frac{5 \cdot 2^4}{2} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} \right) - 45 \cdot 2 = 46c - 90$$

Από ① έχουμε $46c - 90 = c \Leftrightarrow \boxed{c=2}$ Άρα $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

β. Επειδή η g είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} $g''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0}$ ② για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0} = g''(x_0)$. Άρα $g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\gamma. \text{ i. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h) - 2g(x) + g(x-h))'}{(h^2)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h)(x+h)' + g'(x-h)(x-h)'}{2h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) + g'(x) - g'(x-h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{2h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{2h} \right] = \frac{1}{2} g''(x) + \frac{1}{2} g''(x) = g''(x)$$

$$\text{Έχουμε } g''(x) = f(x) + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x \Leftrightarrow g''(x) = (5x^4 + 3x^2)' \Leftrightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = (x^5 + x^3 + c_1 x)' \Leftrightarrow g(x) = x^5 + x^3 + c_1 x + c_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$g'(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c_1 = 1} \quad \text{και} \quad g(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c_2 = 1}$$

Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$

ii. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα και 1 - 1.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΣΤΟΡΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΓΙΑΝΝΗΣ ΦΟΥΚΑΚΗΣ

ΓΙΑΝΝΗΣ ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΛΕΩΝΙΔΑΣ ΚΑΡΑΜΗΤΡΟΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ