

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έχουμε $\bar{\chi} = \frac{t_1+t_2+\dots+t_n}{n} \Leftrightarrow t_1 + t_2 + \dots + t_n = n\bar{\chi}$ (1)

Θέτουμε $\psi_i = t_i - \bar{\chi}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ και έχουμε $\bar{\psi} = \frac{\psi_1+\psi_2+\dots+\psi_n}{n} = \frac{(t_1+t_2+\dots+t_n)-n\bar{\chi}}{n} =$ (λόγω της (1)) $\frac{n\bar{\chi}-n\bar{\chi}}{n} = 0$.

A2. Ο σταθμικός μέσος της μεταβλητής X ορίζεται από την ισότητα $\bar{\chi} = \frac{\chi_1 w_1 + \chi_2 w_2 + \dots + \chi_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$.

A3. Βέβαιο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος

(Ο δειγματικός χώρος Ω).

Αδύνατο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος (Το \emptyset ενδεχόμενο).

A4. $\alpha \rightarrow$ Σωστό

$\beta \rightarrow$ Λάθος

$\gamma \rightarrow$ Σωστό

$\delta \rightarrow$ Λάθος

$\varepsilon \rightarrow$ Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $\chi^2 - \chi + 1 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, γιατί το τριώνυμο έχει διακρίνουσα αρνητική.

B1. $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{f(\chi)-1}{\chi-1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{\chi^2-\chi+1}-2}{\chi-1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{\chi^2-\chi+1}-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)}{(\chi-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)} =$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2\chi(\chi-1)}{(\chi-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2\chi}{\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1} = 1.$$

B2. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(\chi) = 2 \frac{1}{2\sqrt{\chi^2-\chi+1}} (\chi^2 - \chi + 1)' = \frac{2\chi-1}{\sqrt{\chi^2-\chi+1}}$$

Ο ζητούμενος συντελεστής διεύθυνσης είναι $f'(0) = -1$.

B2. Έστω ω η ζητούμενη γωνία. Είναι $\omega \in [0, \pi)$ και $\varepsilon\varphi\omega = f'(0) = -1 \Leftrightarrow \omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πρώτη κλάση είναι $[0, c)$. Η δεύτερη κλάση είναι $[c, 2c)$. Πρέπει $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$.

Γ2.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ χ_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
[0,4)	2	20
[4,8)	6	40
[8,12)	10	45
[12,16)	14	30
[16,20)	18	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

$$\bar{\chi} = \frac{2 \cdot 20 + 6 \cdot 40 + 10 \cdot 45 + 14 \cdot 30 + 18 \cdot 25}{160} = \frac{40 + 240 + 450 + 420 + 450}{160} = \frac{1600}{160} = 10.$$

$$s^2 = \frac{(2-10)^2 \cdot 20 + (6-10)^2 \cdot 40 + (10-10)^2 \cdot 45 + (14-10)^2 \cdot 30 + (18-10)^2 \cdot 25}{160} =$$

$$\frac{64 \cdot 20 + 16 \cdot 40 + 16 \cdot 30 + 64 \cdot 25}{160} = \frac{1280 + 640 + 480 + 1600}{160} = \frac{4000}{160} = 25.$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Γ3. $CV = \frac{s}{|\bar{\chi}|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4. Βρισκόμαστε στο κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων.

Επειδή τα δεδομένα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στις κλάσεις, το βάρος των ατόμων που έχουν επιλεγεί, βρίσκονται στο $\frac{1}{4}$ της 2^{ης} κλάσης, στην τρίτη κλάση και στο $\frac{1}{2}$ της 4^{ης} κλάσης.

Άρα $N(A) = 10 + 45 + 15 = 70$, οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{x-P(A)} - (x - P(A)) = \frac{1-(x-P(A))^2}{x-P(A)} = \frac{(-x+P(A)+1)(x-P(A)+1)}{x-P(A)}$.

Έχουμε $x > P(A) \Leftrightarrow x - P(A) > 0 \Rightarrow x - P(A) + 1 > 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + P(A) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = P(A) + 1$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x + P(A) + 1 > 0 \Leftrightarrow x < P(A) + 1$.

x	$-\infty$	$P(A)$	$P(A) + 1$	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$			↗	$f(P(A)+1)$	↘
				ολ.μέγιστο	

Στο διάστημα $(P(A), P(A) + 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[P(A) + 1, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $P(A) + 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(P(A) + 1) = P(B) - \frac{1}{2}$.

A2. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε $P(A) + 1 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$.

A3. Ζητάμε την πιθανότητα $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Άρα $P[(A \cap B)'] = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P[(A \cap B)'] = \frac{2}{3}$.

A4. Ζητάμε την πιθανότητα $P[(A - B) \cup (B - A)]$. Τα ενδεχόμενα $A - B, B - A$ είναι ασυμβίβαστα οπότε $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) =$

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{1}{2}.$$