

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης**,

Ημ/νία: 28 Μαΐου 2012

## Απαντήσεις Θεμάτων

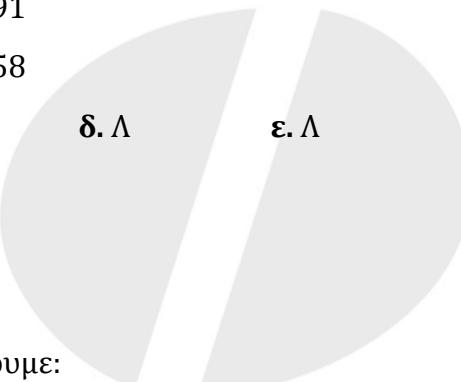
### Θέμα Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 191

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 258

A4. α.  $\Sigma$       β.  $\Sigma$       γ. Λ



### Θέμα Β

#### B1. 1<sup>ος</sup> τρόπος

Από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} & (z - 1)\overline{(z - 1)} + (z + 1)\overline{(z + 1)} = 4 \\ \Leftrightarrow & (z - 1)(\bar{z} - 1) + (z + 1)(\bar{z} + 1) = 4 \\ \Leftrightarrow & z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \\ \Leftrightarrow & 2z\bar{z} = 2 \\ \Leftrightarrow & |z|^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & |z| = 1 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο  $0(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} & |z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 \Leftrightarrow 2|z|^2 + 2 \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

B2. Έστω  $M(z_1), N(z_2)$  και  $N'(-z_2)$  οι εικόνες των μιγαδικών  $z_1, z_2$  και  $-z_2$ . Το  $N'$  είναι το αντιδιαμετρικό του  $N$  στον κύκλο. Δηλαδή  $NN'$  διάμετρος.

$$\text{Ισχύουν } |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{MN}|$$

$$|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{MN'}|$$

Η γωνία  $NMN'$  βαίνει σε ημικύκλιο και είναι ορθή. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο  $NMN'$  έχουμε:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN}|^2 + |\overrightarrow{MN'}|^2 &= |\overrightarrow{NN'}|^2 \\ \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 &= (2\rho)^2 \\ \Leftrightarrow 2 + |z_1 + z_2|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow |z_1 + z_2| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

### 2ος τρόπος

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \\ \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 + 2 &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow |z_1 + z_2| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

**B3.** Από τη σχέση (2) θέτοντας  $w = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} |x + yi - 5(x - yi)| &= 12 \\ \Leftrightarrow |-4x + 6yi| &= 12 \\ \Leftrightarrow |-4x + 16yi|^2 &= 12^2 \\ \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 &= 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (C_2) \end{aligned}$$

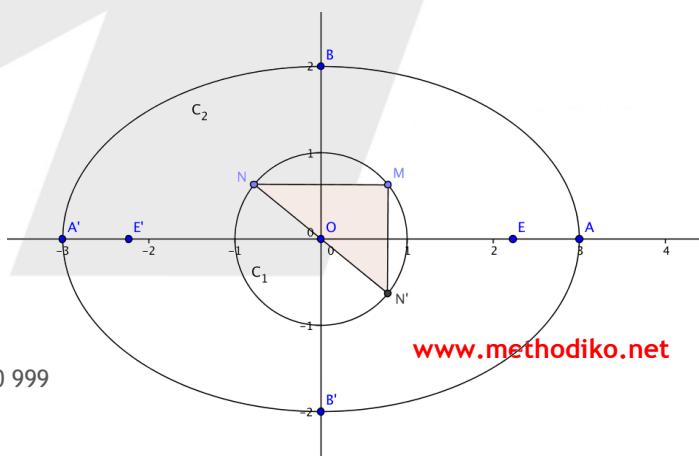
Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι έλλειψη με  $\alpha = 3, \beta = 2$  και  $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 5$  δηλαδή  $\gamma = \sqrt{5}$ , αφού  $\gamma > 0$ .

Οι εστίες της έλλειψης είναι  $E'(-\sqrt{5}, 0)$  και  $E(\sqrt{5}, 0)$

Ισχύει:  $\beta \leq |w| \leq \alpha$

Συνεπώς  $|w|_{max} = \alpha = 3$  και  $|w|_{min} = \beta = 2$

**B4.** Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:



$$||z| - |-w|| \leq |z + (-w)| \leq |z| + |-w| \Leftrightarrow |1 - |w|| \leq |z - w| \leq 1 + |w| \quad (1),$$

εφόσον  $|z| = 1$

Όμως  $|w|_{max} = 3$  συνεπώς  $1 + |w| \leq 1 + |w|_{max} = 4$  (2)

και  $|w|_{min} = 2$  οπότε  $|1 - |w|| \geq |1 - |w|_{min}| = 1$  (3)

Τελικά από (1), (2), (3) προκύπτει:  $1 \leq |z - w| \leq 4$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η  $f$  είναι παραγωγήσιμη με:  $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} < 0$ , για κάθε  $x \in (0,1)$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_1 = (0,1]$ .

Ισχύει:  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_2 = [1, +\infty)$ .

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta_1 = (0,1]$
- η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1 = (0,1]$

Άρα:  $f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [-1, +\infty)$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta_2 = [1, +\infty)$
- Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_2$

Άρα:  $f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)] = [-1, +\infty)$

Επειδή:  $A_f = \Delta_1 \cup \Delta_2$  για το σύνολο τιμών της  $f$  έχουμε:  $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$ .

**Γ2.** Για την εξίσωση έχουμε:

$$x^{x-1} = e^{2013}, \quad \text{με } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x^{x-1} = 2013$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \ln x = 2013$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \ln x - 1 = 2012$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2012 \quad (1)$$

Επειδή:  $2012 \in f(\Delta_1) = [-1, +\infty)$  η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα  $x_1 \in (0,1)$ ,

αφού  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1$ .

Επειδή:  $2012 \in f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$  η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μια ρίζα  $x_2 \in (1, +\infty)$ ,

αφού  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2$ .

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες:  $x_1 \in (0, 1)$  και  $x_2 \in (1, +\infty)$

### Γ3.

$$\text{Ισχύουν: } \begin{cases} f(x_1) = 2012 & \text{με } x_1 \in (0, 1) \\ f(x_2) = 2012 & \text{με } x_2 \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g$  με τύπο:

$$g(x) = f'(x) + f(x) - 2012 \quad \text{με } x \in [x_1, x_2]$$

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως άθροισμα συνεχών αφού η  $f'$  είναι συνεχής (εφόσον η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη)
- $g(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012$

$$\Leftrightarrow g(x_1) = f'(x_1) + 2012 - 2012$$

$$\Leftrightarrow g(x_1) = f'(x_1)$$

$$\Leftrightarrow g(x_1) = \ln x_1 + \frac{x_1 - 1}{x_1} < 0, \quad \text{αφού } x_1 \in (0, 1)$$

$$\text{και } g(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012$$

$$\Leftrightarrow g(x_2) = f'(x_2) + 2012 - 2012$$

$$\Leftrightarrow g(x_2) = f'(x_2)$$

$$\Leftrightarrow g(x_2) = \ln x_2 + \frac{x_2 - 1}{x_2} > 0, \quad \text{αφού } x_2 \in (1, +\infty)$$

$$\text{Άρα: } g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε:  $g(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) - 2012 = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

### 2ος τρόπος

Η λύση προκύπτει και με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle στη συνάρτηση:

$$h(x) = e^x f(x) - 2012 e^x \text{ στο } x \in [x_1, x_2].$$

**Γ4.** Είναι:  $g(x) = f(x) + 1 \geq 0$  αφού ισχύει  $f(x) \geq -1$ , για κάθε  $x > 0$

Οπότε:  $g(x) = (x - 1) \ln x$  για  $x > 0$

Λύνω την εξίσωση:  $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = e$

Επομένως:

$$E(\Omega) = \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x - 1) \cdot \ln x dx$$

$$E(\Omega) = \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} - x \right)' \ln x dx$$

$$E(\Omega) = \int_1^e \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \cdot (\ln x)' dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \frac{1}{x} dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left( \frac{x}{2} - 1 \right) dx$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \left[ \frac{x^2}{4} - x \right]_1^e$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2}{2} - e - \left[ \frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1 \right]$$

$$E(\Omega) = \frac{e^2 - 3}{4}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  ισχύει

$$\int_1^{x^2-x+1} -f(t) dt \geq \frac{x - x^2}{e} \Leftrightarrow e \cdot \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt + x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$$

όπου έχουμε θεωρήσει την συνάρτηση:

$$g(x) = e \cdot \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt + x^2 - x, x \in (0, +\infty)$$

Ισχύουν:

- η  $g$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για  $x = 1$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

- το 1 είναι εσωτερικό σημείο του  $(0, +\infty)$
- η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  áρα και στο 1, με

$$g'(x) = ef(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1) + 2x - 1 \text{ και } g'(1) = ef(1) + 1.$$

Σύμφωνα με το Θ. Fermat θα ισχύει:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow ef(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

Αφού  $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$ , θα είναι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

Ισχύει:  $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot (-f(x))$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = f(x) \cdot \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + ef(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \quad (1)$$

Επειδή:

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right)}$$

(Έχουμε:  $\ln x - x < 0$  για κάθε  $x > 0$  και  $f(x) < 0$ , για κάθε  $x > 0$ .

Συνεπώς πρέπει:  $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e > 0$ )

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη, αφού η  $\frac{\ln t - t}{f(t)}$  είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

και συνεπώς η  $\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right)$  είναι παραγωγίσιμη.

$$\text{Θέτουμε: } h(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

και η (1) γράφεται:

$$h'(x) = h(x) + e \Leftrightarrow h'(x) - h(x) = e \Leftrightarrow e^{-x} \cdot h'(x) - e^{-x} \cdot h(x) = e^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow [e^{-x} h(x)]' = (-e^{1-x})' \Leftrightarrow e^{-x} h(x) = -e^{1-x} + c$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι: } e^{-1} \cdot h(1) = -1 + c \Leftrightarrow 0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{και τελικά } e^{-x} h(x) = -e^{1-x} + 1 \Leftrightarrow h(x) = e^x - e \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt = e^x - e$$

Με παραγώγιση παίρνουμε  $\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} (\ln x - x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$

$$\Delta 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (f(x))^2 \eta \mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right] =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \left[ \frac{1}{u^2} \eta \mu u - \frac{1}{u} \right], \quad \text{θέτοντας } u = \frac{1}{f(x)} \text{ με } u \rightarrow 0^- \text{ καθώς } x \rightarrow 0^+ \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \left( \frac{\eta \mu u}{u^2} - \frac{1}{u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu u - u}{u^2} \stackrel{(0)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma vnu - 1}{2u} = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma vnu - 1}{u} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

*DLH*

**Δ3.** Η  $F$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \text{ και } F''(x) = f'(x) = \left( \frac{\ln x - x}{e^x} \right)' = \frac{\left( \frac{1}{x} - 1 \right) e^x - (\ln x - x) \cdot e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} + (x - 1 - \ln x)}{e^x} > 0 \end{aligned}$$

Άρα η  $F$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$ .

- Η  $F$  είναι συνεχής στα  $[x, 2x]$  και  $[2x, 3x]$
- η  $F$  είναι συνεχής στα  $(x, 2x)$  και  $(2x, 3x)$

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για την  $F$  στα διαστήματα  $[x, 2x]$  και  $[2x, 3x]$   
(έχουν νόημα αφού  $x > 0$ )

εξασφαλίζουμε  $\xi_1 \in (x, 2x)$  και  $\xi_2 \in (2x, 3x)$  ώστε να ισχύουν:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x} \text{ και } F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

Όμως  $F'$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  και άρα:

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

$$\stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(3x) + F(x) > 2F(2x)$$

**Δ4.** Θεωρώ τη συνάρτηση:  $\Phi(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

- $\Phi$  συνεχής στο  $[\beta, 2\beta]$
- $\Phi(\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$
- $\Phi(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ , από το  $\Delta_3$

# ΜΕΘΟΔΙΚΟ

'Ομως είναι:  $F'(x) = f(x) < 0$  και άρα η  $F$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$  και αφού  $\beta < 3\beta \Leftrightarrow F(\beta) > F(3\beta)$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει  $\xi \in (\beta, 2\beta)$  ώστε να ισχύει:

$$\Phi(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$$

Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Μάριος Παπαδιαμαντής, Ηρώ Μαρκάκη



Μεθοδικό Φροντιστήριο

Βουλιαγμένης & Κύπρου 2, Αργυρούπολη, Τηλ: 210 99 40 999  
Δ. Γούναρη 201, Γλυφάδα, Τηλ: 210 96 36 300

[www.methodiko.net](http://www.methodiko.net)