



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 151 

**A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 92 

**A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 22 

**A4.** α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Σωστό\*, δ. Λάθος, ε. Λάθος.

\*έπρεπε να δίνεται ότι η μεταβλητή είναι ποσοτική **διακριτή**







## ΘΕΜΑ Β

**B1.**  $f'(x) = [2e^x(2x - 3)]' = 2e^x(2x - 3) + 4e^x = 2e^x(2x - 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x(2x - 1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	○	+	
f(x)					

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, \frac{1}{2}]$ , ενώ είναι γνησίως

αύξουσα στο  $[\frac{1}{2}, +\infty)$ . Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_1 = \frac{1}{2}$

$$\text{την τιμή } f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) = 2\sqrt{e}(-2) = -4\sqrt{e}$$



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



**B2.**  $P(A) = x_1 = \frac{1}{2}$

$$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

**B3.** Έστω ότι  $A, B$  είναι ασυμβίβαστα  
Ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1 \rightarrow \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Άρα **τα  $A, B$  δεν είναι ασυμβίβαστα.**



**B4.**  $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

- $B - A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A' - B') \leq \frac{2}{3} \quad (1)$

- ή  $A' - B' \subseteq A' \Rightarrow P(A' - B') \leq P(A') \Leftrightarrow P(A' - B') \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \quad (1)$

- Θα δείξουμε ότι  $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(B - A) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{6} \leq P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{2}{3} - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2} \text{ που ισχύει διότι}$$

$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$$

άρα  $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \quad (2)$

Από (1) και (2) :  $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$





# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1.  $F_5 = 1$  και  $F_5\% = 100$  

Από τύπους Vieta έχουμε :

$$\begin{cases} F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \stackrel{F_5=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F_3 + 1 = \frac{8}{5} \\ F_3 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \kappa = 1 \end{cases}$$

$$F_5\% = 100 \Leftrightarrow \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \stackrel{\kappa=1}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$$

$$\Delta = 289 \text{ και } \lambda = 10 \text{ ή } \lambda = -7$$

Όμως  $F_1\% = \lambda \geq 0$ , άρα  $\lambda = 10$



Γ2.  $f_1\% = F_1\% = \lambda = 10$  

$$F_2\% = 3\lambda + 10 = 40$$

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 40 - 10 = 30$$

$$F_3\% = 100 \cdot F_3 = 60$$

$$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - 40 = 20$$

$$F_4\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 90$$

$$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 90 - 60 = 30$$

$$f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100 - 90 = 10$$

Γ3. •  $25\% = f_1\% + \frac{f_2\%}{2} \Rightarrow x_2 = 16$  (1)

•  $25\% = \frac{f_4\%}{2} + f_5\% \Rightarrow x_4 = 24$  (2)

•  $x_4 - x_2 = 2c \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2c = 8 \Leftrightarrow c = 4$

1<sup>η</sup> κλάση :  $[\alpha, \alpha + 4)$ , 2<sup>η</sup> κλάση :  $[\alpha + 4, \alpha + 8)$

$$x_2 = \frac{\alpha + 4 + \alpha + 8}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{2\alpha + 12}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha + 12 = 32 \Leftrightarrow 2\alpha = 20 \Leftrightarrow \alpha = 10$$



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



Κλάσεις	Κεντρικές τιμές $x_i$	$f_i\%$	$F_i$	$F_i\%$
[10 , 14)	12	10	0,1	10
[14 , 18)	16	30	0,4	40
[18 , 22)	20	20	0,6	60
[22 , 26)	24	30	0,9	90
[26 , 30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ	-	100	-	-

Γ4. Το 40% ( $f_4\% + f_5\%$ ) των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22.

Στο 40% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις

Στο 100% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν  $v$  παρατηρήσεις

$$40v = 800 \cdot 100 \Leftrightarrow 40v = 80000 \Leftrightarrow v = 2000$$



## ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α. •  $P(\omega_1) = P(-1) = f(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

•  $P(\omega_2) = P(0) = f(0) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

•  $f'(x) = \left( \frac{x}{x^2 + 1} + 1 \right)' = \frac{(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = -\frac{1}{6} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}$$

•  $P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



**Δ1.β.** •  $f'(\omega) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \omega^2}{(\omega^2 + 1)^2} \leq 0 \stackrel{\omega^2 + 1 > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \omega^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\omega^2 \geq 1 \Leftrightarrow |\omega| \geq 1 \Leftrightarrow \omega \geq 1 \text{ ή } \omega \leq -1$$

Άρα  $A = \{-1, \omega_3, \omega_4\}$

και  $P(A) = P(-1) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

•  $f(\omega) > 1 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega^2 + 1} + 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega^2 + 1} > 0 \stackrel{\omega^2 + 1 > 0}{\Leftrightarrow} \omega > 0$

Άρα  $B = \{\omega_3, \omega_4\}$

και  $P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

•  $x^2 + \omega x \geq -\frac{1}{4}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + \omega x + \frac{1}{4} \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Πρέπει  $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\omega| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \omega \leq 1$

Άρα  $\Gamma = \{-1, 0\}$

και  $P(\Gamma) = P(-1) + P(0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

•  $A - B = \{-1\}$  και  $P(A - B) = P(-1) = \frac{1}{6}$



**Δ2.** •  $f'(x_0) = \varepsilon \varphi 45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{1 - x_0^2}{(x_0^2 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$$(x_0^2 + 1)^2 = 1 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^4 + 2x_0^2 + 1 = 1 - x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$x_0^4 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 + 3) = 0 \stackrel{x_0^2 + 3 \neq 0}{\Leftrightarrow} x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$f(0) = 1$  και  $f'(0) = 1$ , άρα

$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$





# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



**Δ3.**  $\omega_i = -1, 0, \omega_3, \omega_4$



•  $M_1 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_1 = \omega_1 + 1 = -1 + 1 = 0$



•  $M_2 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_2 = \omega_2 + 1 = 0 + 1 = 1$



•  $M_3 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_3 = \omega_3 + 1$



•  $M_4 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_4 = \omega_4 + 1$



Είναι  $1 < \omega_3 < \omega_4$ , άρα  $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$



$R_y = y_4 - y_1 \Leftrightarrow 5 = (\omega_4 + 1) - 0 \Leftrightarrow 5 = \omega_4 + 1 \Leftrightarrow \omega_4 = 4$



•  $\delta_{\omega_k} = \frac{0 + \omega_3}{2} = \frac{\omega_3}{2}$

•  $\delta_{y_k} = \frac{1 + \omega_3 + 1}{2} = \frac{2 + \omega_3}{2}$

Είναι  $2\delta_{\omega_k} = \delta_{y_k} \Leftrightarrow$

$2 \frac{\omega_3}{2} = \frac{2 + \omega_3}{2} \stackrel{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow}$

$2\omega_3 = 2 + \omega_3 \Leftrightarrow$

**$\omega_3 = 2$**

