ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α4. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\gamma = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x+6} - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6} - 3\right)}{\left(\sqrt{x+6} - 3\right)\left(\sqrt{x+6} - 3\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)\left(\sqrt{x+6} - 3\right)}{\cancel{x-3}} = 6 \cdot 6 = 36$

Β2. $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta$

Για να είναι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία με τετμημένες 1 και $\dfrac{1}{3}$ παράλληλες με τον άξονα $x'x$, πρέπει $f'(1) = f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$

- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = 3$ **(1)**
- $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{2\alpha}{3} + \beta = 0 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} -2\alpha + 3\beta = -1$ **(2)**

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $2\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$

Από τη σχέση (1) για $\beta = 1$, έχουμε $2\alpha - 1 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Β3. Για $\alpha = 2, \beta = 1$ και $\gamma = 36$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 36$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty , \frac{1}{3}\right]$, $[1 , +\infty)$, ενώ

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3} , 1\right]$.

τοπικό μέγιστο : $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 36 = \frac{976}{27}$

τοπικό ελάχιστο : $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 + 36 = 36$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $1^η$ κλάση : [50 , 50 + c)

$2^η$ κλάση : [50 + c , 50 + 2c)

$3^η$ κλάση : [50 + 2c , 50 + 3c)

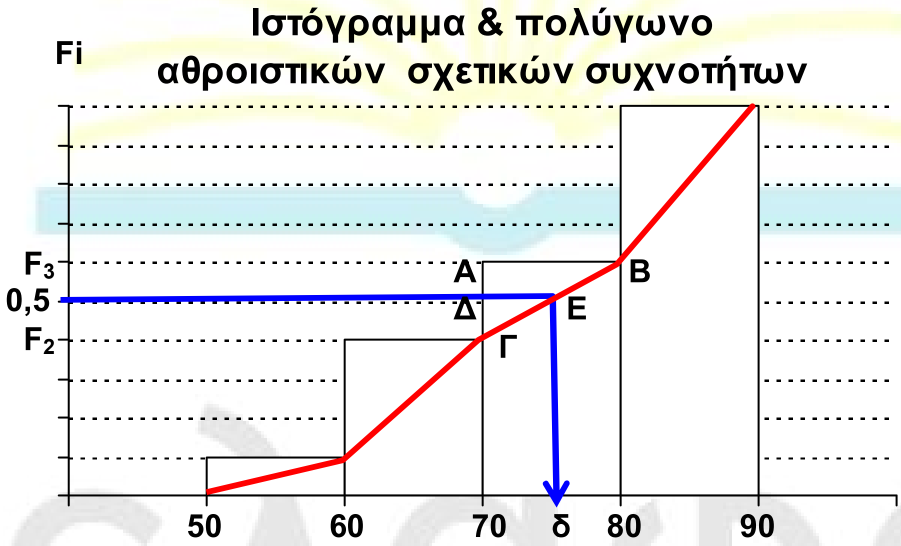
$4^η$ κλάση : [50 + 3c , 50 + 4c)

$$x_4 = \frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} \Leftrightarrow 85 = \frac{100 + 7c}{2} \Leftrightarrow$$

$$100 + 7c = 170 \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow c = 10$$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[50 , 60)	55	f_1	f_1	$55f_1$
[60 , 70)	65	f_2	$f_1 + f_2$	$65f_2$
[70 , 80)	75	f_3	$f_1 + f_2 + f_3$	$75f_3$
[80 , 90)	85	$2f_3$	$f_1 + f_2 + 3f_3$	$170f_3$
ΣΥΝΟΛΑ	-	1	-	$55f_1 + 65f_2 + 245f_3$



- $\sum f_i = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 1 - 3f_3$ **(1)**
- $\bar{x} = \sum x_i f_i = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74$ **(2)**
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια άρα

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{10}{5} = \frac{F_3 - F_2}{0,5 - F_2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2 = \frac{f_3}{0,5 - (1 - 3f_3)} \Leftrightarrow$$

$$6f_3 - 1 = f_3 \Leftrightarrow 5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,2 \quad \textbf{(3)}$$

- $f_4 = 2f_3 = 0,4$

- $(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,4 - f_1$ **(4)**

- $(2) \underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} 55f_1 + 65(0,4 - f_1) + 245 \cdot 0,2 = 74 \Leftrightarrow$

  $55f_1 + 26 - 65f_1 + 49 = 74 \Leftrightarrow -10f_1 = -1 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$ **(5)**

- $(4) \overset{(5)}{\Rightarrow} f_2 = 0,3$

Επομένως ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

Κλάσεις	**x_i**	**f_i**
[50 , 60)	**55**	**0,1**
[60 , 70)	**65**	**0,3**
[70 , 80)	**75**	**0,2**
[80 , 90)	**85**	**0,4**
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**1**

Γ3. Για τις παρατηρήσεις μικρότερες του 80 ισχύει :

Κλάσεις	**x_i**	**f_i**	**v_i**	**$x_i v_i$**
[50 , 60)	**55**	**0,1**	**0,1v**	**5,5v**
[60 , 70)	**65**	**0,3**	**0,3v**	**19,5v**
[70 , 80)	**75**	**0,2**	**0,2v**	**15v**
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**1**	**0,6v**	**40v**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} = \frac{40v}{0,6v} = \frac{200}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = x^2 + \kappa + 1$ και $f(1) = \kappa + 2$

$f'(x) = \left(x^2 + \kappa + 1\right)' = 2x$ και $f'(1) = 2$

Εύρεση εξίσωσης εφαπτομένης

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = 2x + \kappa$

Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

- $x'x$: θέτω $y = 0$, οπότε $x = -\frac{\kappa}{2}$, άρα $A\left(-\frac{\kappa}{2}, 0\right)$
- $y'y$: θέτω $x = 0$, οπότε $y = \kappa$, άρα $B(0, \kappa)$

Εύρεση εμβαδού

$$E = \frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{\kappa}{2}\right|\cdot|\kappa| \overset{\kappa>2}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{\kappa}{2}\cdot\kappa = \frac{\kappa^2}{4}$$

$$E < 4 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{4} < 4 \Leftrightarrow \kappa^2 < 16 \Leftrightarrow |\kappa| < 4$$

$$\overset{\kappa>2}{\Leftrightarrow} \kappa < 4 \overset{\kappa>2}{\Leftrightarrow} 2 < \kappa < 4 \overset{\kappa\in Z}{\Leftrightarrow} \kappa = 3$$

Δ2. α) Τα (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots, (x_{50}, y_{50})$ είναι τα 50 σημεία της (ε), άρα επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x + 3$.

Επομένως $y_i = 2x_i + 3 \Leftrightarrow x_i = \frac{1}{2}y_i - \frac{3}{2}$, $i = 1, \ldots, 50$

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου $\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y} - \frac{3}{2} \overset{\bar{y}=63}{=} 30$

β) $$\bar{x}' = \frac{(x_1+3)+\dots+(x_{20}+3)+x_{21}+\dots+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+\dots+(x_{50}-\lambda)}{50}$$

$$\Leftrightarrow\ 31 = \frac{(x_1+\dots+x_{20}+x_{21}+\dots+x_{35}+x_{36}+\dots+x_{50})+60-15\lambda}{50}$$

$$\Leftrightarrow\ 31 = \frac{\sum x_i+60-15\lambda}{50} \ \Leftrightarrow\ 31 = \frac{\sum x_i}{50}+\frac{60-15\lambda}{50}$$

$$\Leftrightarrow\ 31 = \bar{x} + \frac{60-15\lambda}{50} \ \Leftrightarrow\ 31 = 30 + \frac{60-15\lambda}{50}$$

$$\Leftrightarrow\ 1 = \frac{60-15\lambda}{50} \Leftrightarrow\ 60-15\lambda = 50 \ \Leftrightarrow\ \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Εύρεση τιμών $f(1)$, $f'(0)$

$f(x) = x^2 + 4$, άρα $f(1) = 5$

$f'(x) = 2x$, άρα $f'(0) = 0$

Εύρεση μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

$$0 < \alpha < \beta < \gamma < 1 \ \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$$

$$0 < 4 = f(0) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1) = 5$$

Τελική διάταξη

$f'(0) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1)$

Εύρεση εύρους

$R = f(1) - f'(0) = 5 - 0 = 5$

Εύρεση μέσης τιμής

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} = \frac{f'(0) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(1)}{5}$$

$$= \frac{0 + \alpha^2 + 4 + \beta^2 + 4 + \gamma^2 + 4 + 5}{5}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 17}{5} \overset{(*)}{=} \frac{6 + 17}{5} = \frac{23}{5}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι λάθος το δεδομένο ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$

Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, τότε $0 < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 3$

άρα $\frac{17}{5} < \bar{x} < 4 < \frac{23}{5}$