



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 261

A4. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η εξίσωση γίνεται :  $2x^2 - |w - 4 - 3i| \cdot x + 2|z| = 0$

• Πρέπει  $\Delta = 0 \Leftrightarrow (-|w - 4 - 3i|)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2|z| = 0 \Leftrightarrow$

$$|w - 4 - 3i|^2 = 16|z| \Leftrightarrow |z| = \frac{|w - 4 - 3i|^2}{16} \quad (1)$$

• **1<sup>ος</sup> τρόπος** Το 1 είναι διπλή ρίζα άρα  $\frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{|w - 4 - 3i|}{4} = 1$

$$\Leftrightarrow |w - 4 - 3i| = 4 \quad (2) \quad \text{ΚΕΛΑΦΑΣ}$$

• **2<sup>ος</sup> τρόπος** Το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης άρα

$$2 - |w - 4 - 3i| + 2|z| = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2 - |w - 4 - 3i| + 2 \frac{|w - 4 - 3i|^2}{16} = 0$$

$$\stackrel{\cdot 8}{\Leftrightarrow} 16 - 8|w - 4 - 3i| + |w - 4 - 3i|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(|w - 4 - 3i| - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| - 4 = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| = 4 \quad (2)$$

Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του w είναι

**ο κύκλος  $C_2$  με κέντρο  $K(4, 3)$  και ακτίνα  $\rho_2 = 4$**

• **(1)**  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} |z| = \frac{4^2}{16} \Leftrightarrow |z| = 1 \quad \text{ΚΕΛΑΦΑΣ}$

Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

**ο κύκλος  $C_1$  με κέντρο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho_1 = 1$**



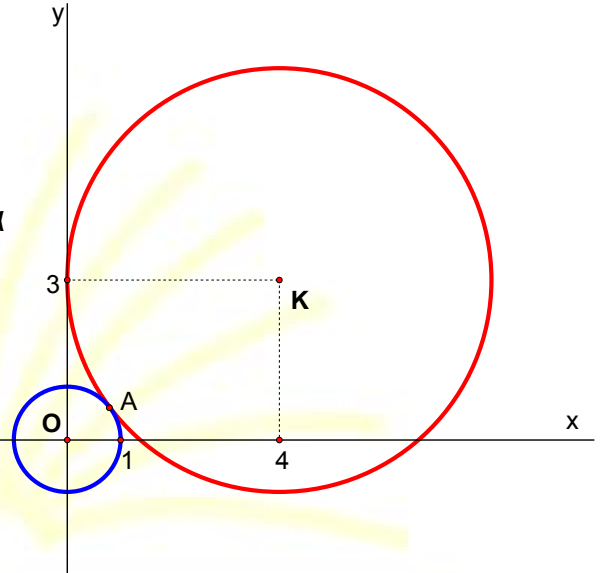
Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



$$\begin{aligned} \text{B2. } (OK) &= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Είναι  $(OK) = \rho_1 + \rho_2$ ,  
άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά  
σε ένα σημείο A (σχήμα)  
Επομένως **υπάρχει μοναδικός  
μιγαδικός αριθμός, η εικόνα  
του οποίου ανήκει και στους  
δύο παραπάνω  
γεωμετρικούς τόπους.**



$$\text{B3. } |w|_{\max} = (OB) = (OK) + \rho_2 = 5 + 4 = 9$$

$$|z - w| \leq |z| + |-w| \Leftrightarrow$$

$$|z - w| \leq 1 + |w| \Leftrightarrow$$

$$|z - w| \leq 1 + |w|_{\max} \Leftrightarrow$$

$$|z - w| \leq 1 + 9 \Leftrightarrow$$

$$|z - w| \leq 10$$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

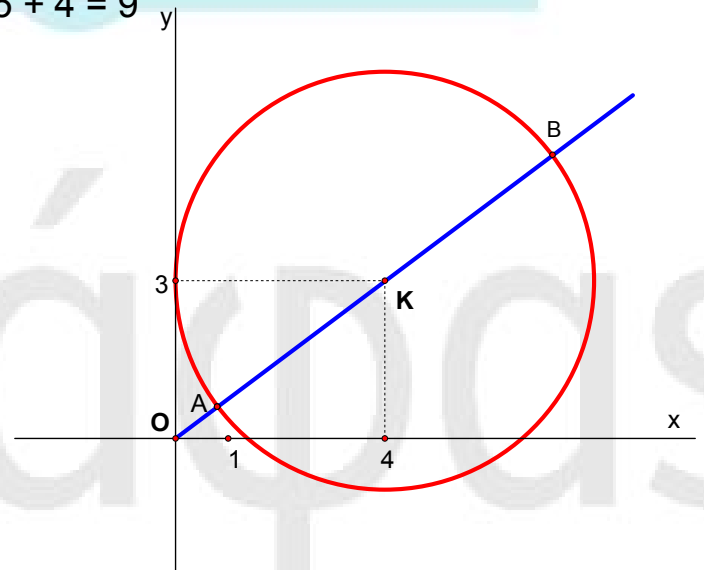
$$|z + w| \leq |z| + |w| \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 1 + |w| \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 1 + |w|_{\max} \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 1 + 9 \Leftrightarrow$$

$$|z + w| \leq 10$$





# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$$\mathbf{B4.} \bullet \quad |2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5 \Leftrightarrow |z \cdot (2z - 3 - 2\bar{z})| = 5 \Leftrightarrow$$

$$|z| \cdot |2z - 2\bar{z} - 3| = 5 \stackrel{|z|=1}{\Leftrightarrow} |2(z - \bar{z}) - 3| = 5 \Leftrightarrow$$

$$|2 \cdot 2\text{Im}(z) \cdot i - 3| = 5 \Leftrightarrow |-3 + 4\text{Im}(z) \cdot i| = 5$$

$$\sqrt{(-3)^2 + [4\text{Im}(z)]^2} = 5 \Leftrightarrow 9 + 16\text{Im}^2(z) = 25 \Leftrightarrow$$

$$16\text{Im}^2(z) = 16 \Leftrightarrow \text{Im}^2(z) = 1 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \pm 1$$

$$\bullet \quad |z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)} = 1 \Leftrightarrow \text{Re}^2(z) + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{Re}^2(z) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$$

Επομένως  $z = \pm i$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

## ΘΕΜΑ Γ

$$\mathbf{\Gamma 1.} \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι : } 2xf'(x) + x^2[f'(x) - 3] = -f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(x^2)' f(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow [x^2 f(x) - x^3 + f(x)]' = 0$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. είναι  $x^2 f(x) - x^3 + f(x) = c$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχω : } f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι :

$$x^2 f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f(x) + f(x) = x^3 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

$$f'(x) = \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} \right)' = \frac{3x^2 \cdot (x^2 + 1) - (x^3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για  $x = 0$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

άρα  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



Γ2. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = 0 = \beta$$

άρα η  $C_f$  έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  την  $y = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = 0 = \beta$$

άρα η  $C_f$  έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την  $y = x$

Γ3.  $f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow}$

$$5(x^2 + 1)^3 - 8 \leq 8(x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow \text{ΚΕΛΑΦΑΣ}$$

$$5(x^2 + 1)^3 \leq 8(x^2 + 1)^2 + 8 \Leftrightarrow$$

$$5(x^2 + 1)^3 \leq 8[(x^2 + 1)^2 + 1] \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2 + 1)^3}{(x^2 + 1)^2 + 1} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow \text{ΚΕΛΑΦΑΣ}$$

$$f(x^2 + 1) \leq f(2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$





# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**Γ4.** Έστω συνάρτηση  $h$ , με  $h(x) = x \cdot \int_0^{x^3-x} f(t) dt$ ,  $x \in [0, 1]$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής άρα η συνάρτηση  $f_1$ , με

$f_1(x) = \int_0^x f(t) dt$  είναι παρ/μη στο  $[0, 1]$ , άρα και συνεχής

• η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πράξεις των συνεχών  $f_1, f_2$ , με  $f_2(x) = x^3 - x$  και  $f_3$ , με  $f_3(x) = x$ .

• η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$  ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$\text{με } h'(x) = x \cdot f(x^3 - x) \cdot (3x^2 - 1) + \int_0^{x^3-x} f(t) dt$$

•  $h(0) = 0 \cdot \int_0^0 f(t) dt = 0$  και

$$h(1) = 1 \cdot \int_0^0 f(t) dt = 0$$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

Άρα από θ. Rolle

η εξίσωση  $h'(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t) dt = -\xi \cdot (3\xi^2 - 1) \cdot f(\xi^3 - \xi).$$

## ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f(x) = x + \int_1^x \left( \int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du \quad (1)$$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε :

$$f'(x) = 1 + \int_1^x \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt, \quad x > 0 \quad (2)$$

Παραγωγίζουμε την (2) και έχουμε για κάθε  $x > 0$

$$f''(x) = \frac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot f''(x) = (f'(x))^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot f''(x) + 1 = (f'(x))^2$$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**Δ2.α.** Είναι  $f(x) \cdot f'(x) \neq 0$ , για κάθε  $x > 0$ , άρα  $f(x) \neq 0$  και  $f'(x) \neq 0$ .  
 Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  και  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x > 0$ ,  
 άρα από συνέπειες θ. Βολζανο,  
 η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(0, +\infty)$ .  
 Είναι

$$f(1) = 1 + \int_1^1 \left( \int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du = 1 > 0, \quad \text{ΚΕΛΑΦΑΣ}$$

επομένως  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ .

Η  $f'$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  και  $f'(x) \neq 0$ , για κάθε  $x > 0$ ,  
 άρα από συνέπειες θ. Βολζανο,  
 η  $f'$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(0, +\infty)$ .

$$\text{Είναι } f'(1) = 1 + \int_1^1 \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt = 1 > 0,$$

επομένως  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ .

**β.**  $(f'(x))^2 = 1 + f(x) \cdot f''(x)$ , για κάθε  $x > 0$  ΚΕΛΑΦΑΣ

Είναι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ , άρα  $f'(x) = \sqrt{1 + f(x) \cdot f''(x)}$

Η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , άρα

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + f(x) \cdot f''(x)} = \sqrt{1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x)} \\ &= \sqrt{1 + f(0) \cdot f''(0)} \stackrel{f(0)=0}{=} \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

**Δ3.α.**  $g'(x) = \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{f''(x) \cdot f'(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \stackrel{(2)}{=} \frac{-1}{f^2(x)}$  ΚΕΛΑΦΑΣ

$$g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{και} \quad g'(1) = \frac{-1}{f^2(1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

(ε) : εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο  $M(1, g(1))$

$$(ε) : y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Η  $g$  είναι κυρτή άρα η  $C_g$  βρίσκεται πάνω από την (ε)

με εξαίρεση το σημείο επαφής  $M$ , άρα

$$g(x) \geq 2 - x, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

ΚΕΛΑΦΑΣ



# Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**Δ3.β.** Για κάθε  $x > 0$  είναι :

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

$$g(x) \geq 2 - x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 2 - x \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) \geq (2 - x) \cdot f(x)$$

Για  $x = 0$  είναι :  $f'(0) > (2 - 0) \cdot f(0)$

άρα  $f'(x) \geq (2 - x) \cdot f(x)$ , για κάθε  $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$f'(x) - (2 - x) \cdot f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \geq 0$  και το "=" δεν ισχύει παντού

Επομένως  $\int_0^1 [f'(x) - (2 - x) \cdot f(x)] dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

$$[f(x)]_0^1 > \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$f(1) - f(0) > \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$1 > \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x) dx > 1$$

**Δ4.** Είναι  $h(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

$$E = \int_0^1 [f'(x)]^3 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 \cdot f'(x) dx$$

$$= \left[ [f'(x)]^2 \cdot f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 2 \cdot f'(x) \cdot f''(x) \cdot f(x) dx$$

$$\stackrel{(2)}{=} [f'(1)]^2 \cdot f(1) - \cancel{[f'(0)]^2 \cdot f(0)} - \int_0^1 2 \cdot f'(x) \cdot [f'(x)]^2 - 1 dx$$

$$= 1 - 2 \int_0^1 [f'(x)]^3 - f'(x) dx$$

**ΚΕΛΑΦΑΣ**

$$= 1 - 2 \int_0^1 [f'(x)]^3 dx + 2 \int_0^1 f'(x) dx$$

$$\text{Άρα } E = 1 - 2E + 2[f(x)]_0^1 \Leftrightarrow 3E = 1 + 2f(1) - \cancel{2f(0)} \Leftrightarrow$$

$$3E = 1 + 2 \Leftrightarrow 3E = 3 \Leftrightarrow \mathbf{E = 1 \text{ τ.μ.}}$$