ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

Α4. α. Σωστό , **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\dfrac{z-1}{z+1}} = -\dfrac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \dfrac{1-z}{z+1} \Leftrightarrow$

$(\bar{z}-1)(z+1) = (1-z)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z\bar{z} + \cancel{\bar{z}} \cancel{-z} - 1 = \cancel{\bar{z}} - 1 - z\bar{z} \cancel{-z} \Leftrightarrow$

$2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Β2. $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z} \quad (1)$

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \overset{(1)}{=} (z - \bar{z})^4 = \left[2\mathrm{Im}(z)i\right]^4 = 2^4 \cdot \mathrm{Im}^4(z) \cdot i^4$$

$$= 16 \cdot \mathrm{Im}^4(z) \cdot 1 = 16\mathrm{Im}^4(z) \in \mathrm{IR}$$

Β3. Ισχύουν : $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1} \quad (2)$ και $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2} \quad (3)$

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2$$

Είναι $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2| \le 2$

επομένως $|z_1 + z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \le 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^3+\alpha) = 1+\alpha \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-\beta)^2 = (1-\beta)^2 \\ f(1) = (1-\beta)^2 \end{array}\right\} \overset{f \text{ συνεχής}}{\underset{\text{στο } x_0=1}{\Rightarrow}} (1-\beta)^2 = 1+\alpha \quad (1)$

$(1) \overset{(1-\beta)^2\geq 0}{\Rightarrow} 1+\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha \geq -1}$

$(1) \Rightarrow \cancel{1} - 2\beta + \beta^2 = \cancel{1} + \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta^2 - 2\beta = \alpha \quad (2)}$

Γ2. $\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ συνεχής στο } [-1\,,\,1) \text{ ως πολυωνυμική} \\ \bullet\ f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1 \text{ από υπόθεση} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } [-1\,,\,1]$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(-1) = \alpha - 1 \leq 0 \\ \bullet\ f(1) = (1-\beta)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1)\cdot f(1) \leq 0$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

▹ Αν $f(-1)\cdot f(1) < 0$, τότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1\,,\,1)$

▹ Αν $f(-1)\cdot f(1) = 0$, τότε $f(-1) = 0$ ή $f(1) = 0$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[-1\,,\,1]$

Γ3. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x^3+\alpha)-(1-\beta)^2}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3 \cancel{+\alpha} - 1 \cancel{-\alpha}}{x-1} \\ = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x^2}{1} = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-\beta)^2-(1-\beta)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-\beta+1-\beta)}{\cancel{x-1}} \\ = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-2\beta+1) = 2-2\beta \end{array}\right\} \overset{f \text{ παρ/μη}}{\underset{\text{στο } x_0=1}{\Rightarrow}}$

$3 = 2 - 2\beta \Leftrightarrow 2\beta = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -\dfrac{1}{2}}$

$(2) \overset{\beta=-\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} + 1 = \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = \dfrac{5}{4}}$

Γ4. Για $\alpha = \frac{5}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$ έχουμε :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{5}{4}, & x < 1 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$(\varepsilon): \ y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \ \Leftrightarrow \ (\varepsilon): \ y - \frac{9}{4} = 3\cdot(x - 1) \ \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): \ y - \frac{9}{4} = 3x - 3 \ \Leftrightarrow \ (\varepsilon): \ \mathbf{y = 3x - \frac{3}{4}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $g(x) = \frac{1}{1 - x^2}\cdot f(x)$, για κάθε $x \in (-1\ ,\ 1)$ **(1)**

- $(1) \overset{x=0}{\Rightarrow} g(0) = \frac{1}{1 - 0^2}\cdot f(0) = f(0) = -3$

  άρα οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο το $A(0\ ,\ -3)$
- Από την (1) προκύπτει ότι η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων, άρα παραγωγίζοντας την (1)

  έχουμε $g'(x) = \left[\frac{f(x)}{1 - x^2}\right]' = \frac{f'(x)\cdot(1 - x^2) - 2x\cdot f(x)}{(1 - x^2)^2}$

  και για $x = 0$ προκύπτει $g'(0) = f'(0)$

  άρα **οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(0\ ,\ -3)$**

Δ2. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = g(x) - \beta x + 3$, $x \in (-1\ ,\ 1)$

Είναι $g(x) \leq \beta x - 3 \ \Leftrightarrow \ \varphi(x) \leq 0 = \varphi(0)$.

- Η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1\ ,\ 1)$ με $\varphi'(x) = g'(x) - \beta$
- Το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1\ ,\ 1)$

Από Θ. Fermat ισχύει ότι $\varphi'(0) = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{g'(0) = \beta}$

Η κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο Α (0 , -3) είναι :

(ε) : $y - g(0) = g'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow$

(ε) : $y - (-3) = \beta x \Leftrightarrow$

(ε) : $y = \beta x - 3$

Δ3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα,

άρα η εξίσωση $f'(x) = \beta$ έχει μια το πολύ ρίζα στο (-1 , 1)

Όμως $f'(0) = g'(0) = \beta$,

άρα **η εξίσωση $f'(x) = \beta$ έχει μοναδική ρίζα στο (-1 , 1) το 0.**

Δ4. Η f' είναι γνησίως αύξουσα,

άρα η f είναι κυρτή στο (-1 , 1)

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε)

με εξαίρεση το σημείο επαφής Α (0 , -3)

άρα **$f(x) \geq \beta x - 3$, για κάθε $x \in (-1 , 1)$.**