



Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 194
A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246
A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222
A4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. $(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2 \Leftrightarrow$

$$|z - 2|^2 + |z - 2| - 2 = 0$$

Θέτουμε $|z - 2| = \omega \geq 0$ και έχουμε:

$$\omega^2 + \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 1 \text{ ή } \omega = -2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

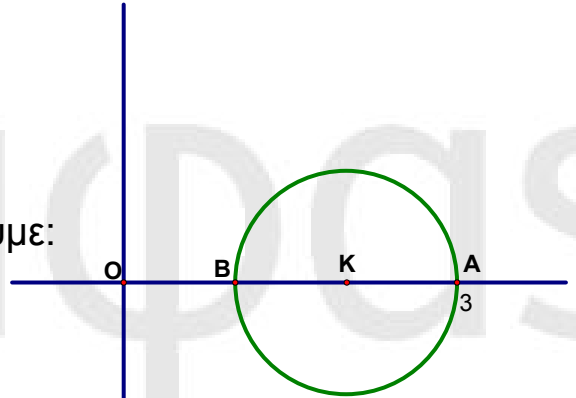
$$\text{άρα } |z - 2| = 1$$

Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C με κέντρο K (2, 0) και ακτίνα $\rho = 1$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$|z|_{\max} = (OA) = 3, \text{ άρα } |z| \leq 3$$



Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

B2. • z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί, άρα $\text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$

$$|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2\text{Im}(z_1)| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|\text{Im}(z_1)| = 1 \Leftrightarrow \text{Im}(z_1) = \pm 1$$

Άρα $z_{1,2} = \kappa \pm i, \kappa \in \mathbb{R}$

$$\bullet |z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow |\kappa \pm i - 2| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\kappa - 2)^2 + 1^2} = 1 \Leftrightarrow (\kappa - 2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2, \text{ άρα } z_{1,2} = 2 \pm i$$

• Τύποι Vieta

$$S = -\beta = z_1 + z_2 = 4, \text{ άρα } \beta = -4$$

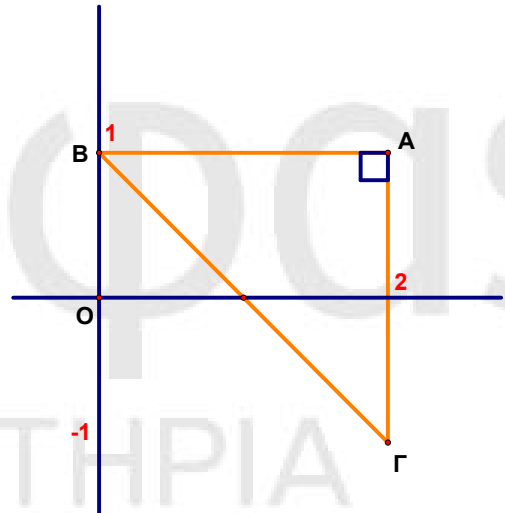
$$P = \gamma = z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(2 - i) = 4 + 1 = 5, \text{ άρα } \gamma = 5$$

$$\mathbf{B3.} \ u = \left(\frac{z_1 + i}{z_2 - i} \right)^{2013} \stackrel{z_1 = 2 + i}{=} \stackrel{z_2 = 2 - i}{=} \left(\frac{2 + 2i}{2 - 2i} \right)^{2013}$$

$$= \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^{2013} = \left(\frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} \right)^{2013}$$

$$= \left(\frac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} \right)^{2013} = \left(\frac{2i}{2} \right)^{2013}$$

$$= i^{2013} = (i^4)^{503} \cdot i = 1^{503} \cdot i = i$$



$$A(z_1) \rightarrow A(2, 1)$$

$$\Gamma(z_2) \rightarrow \Gamma(2, -1)$$

$$B(u) \rightarrow B(0, 1)$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (A\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{2 \text{ τ.μ.}}$$



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι $\frac{1}{3}$,

άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ που είναι κάθετη στην (ε) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(2) = -3$.

$$f'(x) = \left(\frac{4}{x-1} + ax \right)' = a - \frac{4}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = -3 \Leftrightarrow a - \frac{4}{(2-1)^2} = -3 \Leftrightarrow a - 4 = -3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Γ2. Για $\alpha = 1$ είναι :

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + x, x \neq 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, x \neq 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
f'(x)	+	○	-	-	○	+
f(x)	↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 1)$ και $(1, 3]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = -3$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(3) = 5$.



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ3. • $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{4}{x-1} + x \right) = +\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 1$

1^{ος} τρόπος

• $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 0$

2^{ος} τρόπος

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x-1} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x^2 - x} + 1 \right) = 1 = \lambda$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x-1} + x - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$

1^{ος} τρόπος

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$

2^{ος} τρόπος

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x-1} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2 - x} + 1 \right) = 1 = \lambda$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x-1} + x - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$

Γ4. • $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1) \cdot f(x) - 6}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1) \cdot \left(\frac{4}{x-1} + x \right) - 6}{x^2 - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 + x \cdot (x-1) - 6}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ



ΘΕΜΑ Δ

$$\begin{aligned}\Delta 1. f'(x) &= \left(x^2 + x\sqrt{x^2 + 1}\right)' = 2x + \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{2x\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1 + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0\end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

$$\Delta 2. f(x^3 - x + 1) = f(2) \stackrel{f^{-1-1}}{\Leftrightarrow} x^3 - x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$$

Θεωρούμε $Q(x) = x^3 - x - 1$

- η Q είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως πολυωνυμική
- $Q(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$
- $Q(3) = 3^3 - 3 - 1 = 23 > 0$

από Θ. Bolzano η Q έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$.

$\Delta 3.$ Η f είναι παραγωγίσιμη στα $[1, 2]$, $[2, 3]$ και $[1, 3]$

άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα.

Από Θ.Μ.Τ. με την f στα $[1, 2]$, $[2, 3]$ και $[1, 3]$

έχουμε ότι υπάρχουν :

- $\xi_1 \in (1, 2)$ με $f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1)$
- $\xi_2 \in (2, 3)$ με $f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$
- $\xi \in (1, 3)$ με $f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - f(1)}{2}$

Είναι $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(3) - f(2) + f(2) - f(1) = f(3) - f(1) = 2f'(\xi)$

