

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho^2$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

**γ)** Ισχύει ότι:  $|\eta x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ , είναι κύκλος με κέντρο  $K(2, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$  (μονάδες 5).

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό  $z$  που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι  $|z| \leq 3$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 8**

**B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, είναι ρίζες της εξίσωσης  $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ , με  $w$  μιγαδικό αριθμό,  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 5$$

**Μονάδες 9**

**B3.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1 = 2+i$ ,  $z_2 = 2-i$  και  $u = \left(\frac{z_1+i}{z_2-i}\right)^{2013}$  να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z_1, z_2$  και  $u$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{x-1} + \alpha x$  με  $x \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$

- Γ1.** Να βρείτε το  $\alpha$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon): x - 3y + 6 = 0$

**Μονάδες 6**

Αν  $\alpha = 1$ , τότε:

- Γ2.** να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα

**Μονάδες 6**

- Γ3.** να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 8**

- Γ4.** να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)f(x) - 6}{x^2 - 1}$$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

Να αποδείξετε ότι:

- Δ1.** η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη

**Μονάδες 7**

- Δ2.** η εξίσωση

$$f(x^3 - x + 1) = f(2)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 3)$

**Μονάδες 9**

- Δ3.** Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση  $f$  ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  και  $[1, 3]$ , και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1 \in (1, 2)$  και  $\xi_2 \in (2, 3)$  και  $\xi \in (1, 3)$  τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση:

$$2f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$$

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**