Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 192

Α3. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$\frac{1}{z-1} \underset{x,y\in IR}{\overset{z=x+yi}{=}} \frac{1}{x+yi-1} = \frac{1\cdot(x-1-yi)}{(x-1+yi)\cdot(x-1-yi)} = \frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2}$$
$$= \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}i$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 2x-2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=1$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος C με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$

με εξαίρεση το σημείο $A(1,0)$ διότι $z\neq 1$

Β2. Οι εικόνες των z_1, z_2 είναι σημεία του κύκλου $C: |z-2|=1$

άρα $|z_1-2| = |z_2-2| = 1$

Είναι $|z_1+z_2-4| = |(z_1-2)+(z_2-2)| \leq |z_1-2| + |z_2-2| = 1+1=2$

Β3. Η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$, $x, y\in IR$, είναι σημείο του κύκλου C,

άρα $x^2+y^2-4x+3=0$ **(1)**

Είναι $|z|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2+y^2=5$ **(2)**

$$\left.\begin{array}{l}(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} 5-4x+3=0 \Leftrightarrow x=2 \\ (2) \overset{x=2}{\Rightarrow} 4+y^2=5 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{z=2\pm i}$$

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\dfrac{x}{2}\ell n^2 x + x\right)' = \dfrac{1}{2}\cdot\ell n^2 x + \dfrac{x}{2}\cdot 2\ell n x\cdot\dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{1}{2}\cdot\ell n^2 x + \ell n x + 1$

$$= \frac{\ell n^2 x + 2\ell n x + 2}{2} = \frac{(\ell n x + 1)^2 + 1}{2} > 0$$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.**

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot\ell n^2 x + \ell n x + 1\right)' = \ell n x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\ell n x + 1}{x}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{\ell n x + 1}{x} = 0 \iff \ell n x = -1 \iff x = e^{-1} \iff x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Η f είναι κοίλη στο $\left(0, \dfrac{1}{e}\right]$, ενώ είναι κυρτή στο $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

Γ2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "1-1"

$$f(x^4 + 2x) = f(4) \overset{f\ "1\text{-}1"}{\iff} x^4 + 2x = 4 \iff x^4 + 2x - 4 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x^4 + 2x - 4$, $x > 0$

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική
- $g(1) = -1 < 0$ και $g(2) = 16 > 0$

Από Θ.Bolzano η $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

Άρα $\alpha = 1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ είναι $g(x) > 0$, για κάθε $x > 2$, άρα η τιμή του α είναι μοναδική.

Επίσης είναι $g'(x) = 4x^3 + 2 > 0$, για $x > 0$,

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$,

επομένως η ρίζα επίσης είναι μοναδική.

Γ3. $x\ell n^2x < 2 - 2x \Leftrightarrow \frac{x}{2}\ell n^2x < 1 - x \Leftrightarrow \frac{x}{2}\ell n^2x + x < 1 \Leftrightarrow$

$f(x) < f(1) \underset{x>0}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}}$ $\mathbf{0 < x < 1}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt + x^3 = 3x^2\cdot f(x) + 3x - 8$ **(1)** $\Leftrightarrow$

$3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt + x^3 - 3x + 8 = 3x^2\cdot f(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$$f(x) = \frac{3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt + x^3 - 3x + 8}{3x^2}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0\ +\infty)$,
άρα η συνάρτηση f_1, με $f_1(t) = 2t\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $(0\ +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση f_2, με $f_2(t) = 3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt = 3\int_1^x f_1(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ +\infty)$.

Τέλος, **η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ +\infty)$**,
ως πράξεις των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f_2, f_3, f_4,
με $f_3(x) = x^3 - 3x + 8$ και $f_4(x) = 3x^2$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) κατά μέλη έχουμε :

$\left(3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt + x^3\right)' = \left(3x^2\cdot f(x) + 3x - 8\right)' \Leftrightarrow$

$\cancel{6x\cdot f(x)} + 3x^2 = \cancel{6x\cdot f(x)} + 3x^2\cdot f'(x) + 3 \Leftrightarrow$

$3x^2\cdot f'(x) = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow$ $\mathbf{f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2},\ x > 0}$.

Δ2. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)'$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + c,\ x > 0$ **(2)**

$(1) \overset{x=1}{\Rightarrow} 3\int_1^1 2t\cdot f(t)\,dt + 1 = 3f(1) + 3 - 8 \iff f(1) = 2$

$(2) \overset{x=1}{\Rightarrow} f(1) = 2 + c \iff 2 = 2 + c \iff c = 0$

$(2) \overset{c=0}{\Rightarrow} f(x) = x + \dfrac{1}{x} \iff \mathbf{f(x) = \dfrac{x^2+1}{x},\ x > 0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cancel{x} + \dfrac{1}{x} - \cancel{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

άρα **η ευθεία $y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.**

Δ3. $f(x) - x = \cancel{x} + \dfrac{1}{x} - \cancel{x} = \dfrac{1}{x} > 0$, στο $[1, e^2]$

άρα $E = \int_1^{e^2}[f(x) - x]\,dx = \int_1^{e^2}\dfrac{1}{x}\,dx = [\ell n x]_1^{e^2} = \ell n e^2 - \ell n 1 = \mathbf{2\ \text{τ.μ.}}$

Δ4. **1η ΛΥΣΗ**

Για $x > 1$ έχουμε :

$f'(x) > \dfrac{f(x) - 2}{x - 1} \iff \dfrac{x^2 - 1}{x^2} > \dfrac{x + \frac{1}{x} - 2}{x - 1} \iff$

$\dfrac{x^2 - 1}{x^2} > \dfrac{\frac{x^2 + 1 - 2x}{x}}{x - 1} \iff \dfrac{x^2 - 1}{x^2} > \dfrac{(x - 1)^{\cancel{2}}}{x\cdot\cancel{(x - 1)}} \iff$

$\dfrac{x^2 - 1}{x^2} > \dfrac{x - 1}{x} \overset{\cdot x^2 > 0}{\iff} x^2 - 1 > x^2 - x \iff x > 1$ που ισχύει

Δ4. **$2^η$ ΛΥΣΗ**

Για $x > 1$ έχουμε :

Θ.Μ.Τ με την f στο διάστημα $[1 , x]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1 , x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 2}{x - 1}$$

Είναι $f''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{2}{x^3} > 0$, για $x > 0$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0 , +\infty)$

$$x > \xi \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > \frac{f(x) - 2}{x - 1}$$