ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2015
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 191
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251
Α3. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $-6 < \alpha < 6$ είναι $\Delta < 0$, άρα ρίζες μιγαδικές συζυγείς

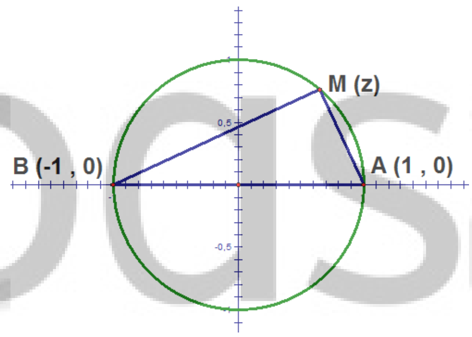
Τύποι Vieta : $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{3}{3} \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{|z| = 1}$

Β2. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1)$

$= z\bar{z} \cancel{-z} \cancel{-\bar{z}} + 1 + z\bar{z} \cancel{+z} \cancel{+\bar{z}} + 1$

$= |z|^2 + 1 + |z|^2 + 1$

$= 1^2 + 1 + 1^2 + 1 = 4$



Αν $M(z)$, $A(1\,,0)$ και $B(-1\,,0)$, τότε :

$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow$

$(AM)^2 + (BM)^2 = (AB)^2$

που είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{ABM}$

(η $A\hat{M}B$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο άρα είναι ορθή)

Β3. Τύποι Vieta : $z_1 + z_2 = -\dfrac{\alpha}{3} \Leftrightarrow z + \bar{z} = -\dfrac{\alpha}{3} \Leftrightarrow$

$2\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{\alpha}{3} \Leftrightarrow 2 \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\alpha}{3} \Leftrightarrow 1 = -\dfrac{\alpha}{3} \Leftrightarrow \mathbf{\alpha = -3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $D_f = (0\,,+\infty)$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$

  άρα η **C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ (y΄y)**

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

  άρα η **C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη**

Γ2. • f συνεχής στο $[1\,,e]$ ως διαφορά συνεχών

• $f(1) = \ln 1 - \dfrac{1}{1} = 0 - 1 = -1 < 0$

$f(e) = \ln e - \dfrac{1}{e} = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$

από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει
μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1\,,e)$. (1)

$f'(x) = \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$, για $x > 0$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,+\infty)$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα. (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ **η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.**

Γ3. Αναζητούμε το πρόσημο της f στο διάστημα $[e\,,2e]$

$$e \le x \le 2e \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(2e) \le f(x) \le f(2e) \xRightarrow{f(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0} f(x) > 0$$

Άρα $E = \int_e^{2e} f(x)\,dx = \int_e^{2e}\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)dx = \int_e^{2e}(x)'\cdot\ln x\,dx - \int_e^{2e}\dfrac{1}{x}\,dx$

$= [x\cdot\ln x]_e^{2e} - \int_e^{2e} x\cdot(\ln x)'\,dx - [\ln x]_e^{2e}$

$= 2e\cdot\ln 2e - e\cdot\ln e - \int_e^{2e} 1\,dx - (\ln 2e - \ln e)$

$= 2e\cdot(\ln 2 + \ln e) - e - [x]_e^{2e} - \ln 2$

$= 2e\ln 2 \cancel{+2e} \cancel{-e} \cancel{-2e} \cancel{+e} - \ln 2 = (2e - 1)\ln 2$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - f(x) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = 2x \cdot e^{-x} \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}$

$f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = 2x \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^x\right]' = (x^2)'$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε : $f(x) \cdot e^x = x^2 + c,\ x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$: $f(1) \cdot e^1 = 1^2 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $f(x) \cdot e^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{e^x},\ x \in \mathbb{R}$.

Δ2. $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - f(x) = \dfrac{2x}{e^x} - \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{2x - x^2}{e^x},\ x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘		↗		↘

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$.

- $\Delta_1 = (-\infty, 0]$

  Η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο Δ_1.

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 \cdot e^{-x}\right) = +\infty$

  $f(0) = 0$

  $\Rightarrow f(\Delta_1) = [0, +\infty)$

- $\Delta_2 = (0, 2)$

  Η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο Δ_2.

  $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$

  $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{4}{e^2}$

  $\Rightarrow f(\Delta_2) = \left(0, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- $\Delta_3 = [2\,,\,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f \text{ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο } \Delta_3. \\ f(2) = \dfrac{4}{e^2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x} = 0\end{array}\right\} f(\Delta_3) = \left[\dfrac{4}{e^2}\,,\,+\infty\right)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το
$f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3) = [0\,,\,+\infty)$.

Δ3. $x^2 = 2e^{x-2} \Leftrightarrow x^2 = 2\dfrac{e^x}{e^2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2}{e^2}$ **(1)**

- $\dfrac{2}{e^2} \in f(\Delta_1) \overset{f\downarrow \text{στο } \Delta_1}{\Rightarrow}$ η **(1)** έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1
- $\dfrac{2}{e^2} \in f(\Delta_2) \overset{f\uparrow \text{στο } \Delta_2}{\Rightarrow}$ η **(1)** έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2
- $\dfrac{2}{e^2} \in f(\Delta_3) \overset{f\downarrow \text{στο } \Delta_3}{\Rightarrow}$ η **(1)** έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_3

Επομένως **η εξίσωση $x^2 = 2e^{x-2}$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο IR**.

Δ4. $f(-1) = \dfrac{(-1)^2}{e^{-1}} = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$

$f'(-1) = \dfrac{2(-1)-(-1)^2}{e^{-1}} = \dfrac{-3}{e^{-1}} = -3e$

(ε) : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\ (-1\,,\,f(-1))$

(ε) : $y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x+1) \Leftrightarrow$ (ε) : $y - e = -3e\cdot(x+1) \Leftrightarrow$

(ε) : $y - e = -3ex - 3e \Leftrightarrow$ (ε) : $y = -3ex - 2e$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty\,,\,0]$, άρα στο διάστημα $(-\infty\,,\,0]$
η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής M.
$f(x) \geq -3ex - 2e$, για κάθε $x \leq 0$, άρα
$f(x) + 2e + 3ex \geq 0$, για κάθε $x \leq 0$.