Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ &
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 142 - 143

Α2. α. Ψ

β. Για να είναι το x_0 θέση σημείου καμπής της f πρέπει επιπλέον να αλλάζει το πρόσημο της f'' εκατέρωθεν του x_0 (δηλαδή πρέπει να αλλάζει η κυρτότητα της f εκατέρωθεν του x_0).

Με αντιπαράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$.
Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με
$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.
Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής. Όμως $f''(0) = 0$.

Α3. δ

Α4. α. Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$h'(x) = \left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)' = \frac{e^x\cdot(1+e^{2x}) - e^x\cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x\cdot(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$$

- $$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x\cdot(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} = 0 \underset{1+e^{2x}>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} 1 - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- $$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x\cdot(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} > 0 \underset{1+e^{2x}>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} 1 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x} < e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	↗		↘

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Η h παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο για $x = 0$

την τιμή $h(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

Β2. ▷ $\Delta_1 = (-\infty, 0]$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\left.\begin{aligned}
&\bullet \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{0}{1+0} = 0, \\
&\text{διότι } \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \\
&\bullet h(0) = \frac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow h(\Delta_1) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

▷ $\Delta_2 = (0, +\infty)$

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\left.\begin{aligned}
&\bullet \lim_{x\to0^+} h(x) \overset{h \text{ συνεχής}}{=} h(0) = \frac{1}{2} \\
&\bullet \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^x} = 0, \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow h(\Delta_2) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι

$$h(A) = h(\Delta_1) \cup h(\Delta_2) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

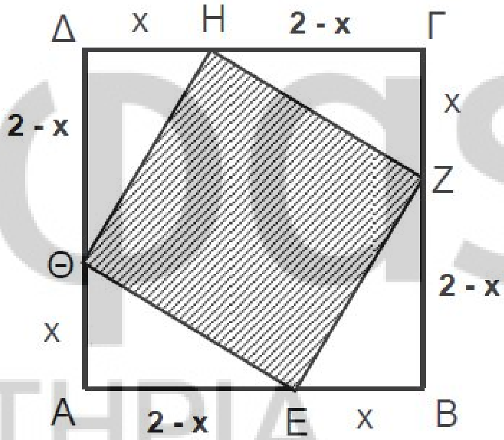
Β3. • Η h είναι συνεχής στο IR, άρα
η C_h δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, άρα η C_h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ την $y = 0$ ($x'x$).

Β4.
$$\int_0^1 e^x \cdot h(x)\,dx = \int_0^1 e^x \cdot \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\ell n(1+e^{2x})\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\ell n(1+e^2) - \ell n2\right] = \frac{1}{2}\cdot \ell n\frac{1+e^2}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{BEZ}$



$EZ^2 = EB^2 + BZ^2$

$EZ^2 = x^2 + (2 - x)^2$

$EZ^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2$

$EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

$EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4},\ 0 \le x \le 2$.

Γ2. Είναι $(EZH\Theta) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

άρα $f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ 0 \le x \le 2$.

Γ3. $f'(x) = (2x^2 - 4x + 4)' = 4x - 4,\ 0 \le x \le 2.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘		↗	
	τ.μ.		τ.ελ.		τ.μ.

Είναι $f(0) = f(2) = 4$ και $f(1) = 2$.

Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο για $x = 1$,

ενώ γίνεται μέγιστο για $x = 0$ ή $x = 2$.

Γ4. Για $x_0 \in [0, 2]$ είναι :

$x_0 \ge 0 \Leftrightarrow e^{x_0} \ge e^0 \Leftrightarrow e^{x_0} \ge 1 \Leftrightarrow 4e^{x_0} \ge 4 \Leftrightarrow 4e^{x_0} + 1 \ge 5$

Όμως $2 \le (ΕΖΗΘ) = f(x) \le 4$, για κάθε $x \in [0, 2]$.

Άρα $4e^{x_0} + 1 > f(x_0)$ και επομένως δεν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ ώστε το εμβαδόν $f(x_0)$ του ΕΖΗΘ να ισούται με $4e^{x_0} + 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$

Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ.

άρα πρέπει $f(0) = f(3) = 2$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ είναι 8 τ.μ.

$\int_0^3 |f'(x)|\,dx = 8 \Leftrightarrow -\int_0^2 f'(x)\,dx + \int_2^3 f'(x)\,dx = 8 \Leftrightarrow$

$-[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow -f(2) + f(0) + f(3) - f(2) = 8 \Leftrightarrow$

$-f(2) + 2 + 2 - f(2) = 8 \Leftrightarrow -2f(2) = 4 \Leftrightarrow f(2) = -2$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ell nx} \underset{\text{De L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{(\ell nx)'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \overset{f' \text{ συνεχής}}{=} \dfrac{f'(1)}{1} = -3$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{f(x)-2} \underset{\text{De L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x)'}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f'(x)} = -\infty$

  διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ και $f'(x) < 0$, για $x \in (0\ ,\ 1)$.

Δ2.

x	0		2		3
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	
	τ.μ.		τ.ελ.		τ.μ.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0\ ,\ 2]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2\ ,\ 3]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ και $x = 3$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 2$.

x	0		1		3
$f'(x)$		↘		↗	
$f(x)$		⌒		∪	
			σ.κ.		

Η f είναι κοίλη στο $[0\ ,\ 1]$, ενώ είναι κυρτή στο $[1\ ,\ 3]$.
Η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$.

Δ3. • Η f είναι συνεχής στο $[2\ ,\ 3]$ ως παραγωγίσιμη

• $f(2)\cdot f(3) = -4 < 0$

από Θ.Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2\ ,\ 3)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

και επειδή η f είναι γν. αύξουσα στο $[2\ ,\ 3]$ το x_0 είναι μοναδικό.

▷ Για κάθε $x_1 \in (2\ ,\ x_0) \cup (x_0\ ,\ 3)$ είναι $\lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(x_1)} \in IR$

▷ $2 < x < x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$

$x_0 < x < 3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (2\ ,\ x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (x_0\ ,\ 3)$

Είναι $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{f(x)} \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{1}{f(x)}$, άρα το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2\ ,\ 3)$, για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$.

Δ4.