Λύσεις

(Ο καθηγητής Μαθ/κά Προσ/σμού 7/9/2016)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 232

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 303

Α3.

α	β	γ	δ	ε
Λ	Σ	Σ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$ άρα $f(3)=2$.

όμως $f(3) = \frac{3\alpha-1}{3+1} = \frac{3\alpha-1}{4}$. Άρα θα πρέπει $\frac{3\alpha-1}{4} = 2 \Leftrightarrow$

$3\alpha - 1 = 8 \Leftrightarrow 3\alpha = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

Β2. Για $\alpha=3$ είναι $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$, $x \neq -1$.

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1-1}{x_1+1} = \frac{3x_2-1}{x_2+1} \Rightarrow$

$$(3x_1-1)\cdot(x_2+1) = (3x_2-1)(x_1+1) \Rightarrow$$
$$\cancel{3x_1x_2} + 3x_1 - x_2 \cancel{-1} = \cancel{3x_1x_2} + 3x_2 - x_1 \cancel{-1} \Rightarrow$$
$$3x_1 - x_2 = 3x_2 - x_1 \Rightarrow$$
$$4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+1}\right)' = \frac{(3x-1)'\cdot(x+1) - (3x-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(-1,+\infty)$.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f.

- $f((-\infty,-1)) \overset{f \text{ συνεχής}}{\underset{\nearrow}{=}} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to-1^-} f(x)\right) = (3,+\infty) = A_1$

αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3 = 3$

και $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \left(\frac{1}{x+1}\cdot(3x-1)\right) = \frac{1}{0^-}\cdot(-4) = +\infty$

- $f((-1,+\infty)) \overset{f \text{ συνεχής}}{\underset{\nearrow}{=}} \left(\lim_{x\to-1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,3) = A_2$

αφού $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \left(\frac{1}{x+1}\cdot(3x-1)\right) = \frac{1}{0^+}(-4) = -\infty$

και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3 = 3$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $A_1 \cup A_2 = (3,+\infty)$

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(3,+\infty)$

Είναι $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x-1}{x+1} \Leftrightarrow 3x-1 = y(x+1) \Leftrightarrow 3x-1 = yx+y$

$\Leftrightarrow (y-3)\cdot x = -1-y$

$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{3-y}$

Άρα $f^{-1}: (3,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}$

Β4. Για τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} λύνουμε την εξίσωση $\left[f(x) = f^{-1}(x) \;,\; x \neq -1, 3\right]$

Είναι $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} = \frac{x+1}{3-x} \Leftrightarrow (3x-1)(3-x) = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow 9x - 3x^2 - 3 + x = x^2+2x+1 \Leftrightarrow 4x^2-8x+4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1$, δεκτή λύση.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν μοναδικό σημείο τομής το $M(1, f(1))$, δηλ. το $M(1,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \left(x+1-\frac{1}{x-2}\right)' = x'+1'-\left(\frac{1}{x-2}\right)'$

$$= 1+0-\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\cdot(x-2)'\right)$$

$$= 1+\frac{1}{(x-2)^2} > 0 \text{, για κάθε } x>2.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

Επίσης, $f''(x) = \left(1+\frac{1}{(x-2)^2}\right)' = -\frac{1}{(x-2)^4}\left((x-2)^2\right)'$

$$= -\frac{1}{(x-2)^4}\cdot 2(x-2) = -\frac{2}{(x-2)^3} < 0 \text{, για κάθε } x>2.$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(2,+\infty)$.

Γ2. Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(x+1-\frac{1}{x-2}\right) = 2+1-(+\infty) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Πλάγιες οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-\frac{1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x-2)}\right)$$

$$= 1+0-0 = 1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{1}{x-2}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x-2}\right) = 1-0 = 1.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} |f(x)-(x+1)|\, dx$

$$= \int_{\lambda}^{\lambda+1}\left|-\frac{1}{x-2}\right| dx \ \underset{x-2>0}{\overset{\lambda>2 \text{ άρα}}{=\!=}} \ \int_{\lambda}^{\lambda+1}\frac{1}{x-2}\,dx = \Big[\ln(x-2)\Big]_{\lambda}^{\lambda+1}$$

$$= \ln(\lambda-1)-\ln(\lambda-2) = \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda-2}\right) \quad \text{τ.μ.}$$

Γ4. $E(\lambda) > \ln 2 \iff \ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda-2}\right) > \ln 2 \overset{\ln \uparrow}{\iff}$

$$\frac{\lambda-1}{\lambda-2} > 2 \iff \lambda-1 > 2(\lambda-2) \iff \lambda-1 > 2\lambda-4 \iff \lambda<3$$

Άρα $E(\lambda) > \ln 2 \iff 2<\lambda<3$

ΘΕΜΑ Δ Δ1. Η f στο διάστημα $(0,1)\cup(1,+\infty)$ έχει τύπο $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$, οπότε είναι συνεχής, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

• Για την συνέχεια της f στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0, \quad \text{διότι}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=\!=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Άρα $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = 0\end{cases}\right\} \Rightarrow f$ συνεχής στο 0.

• Για την συνέχεια της f στο $x_1 = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=} \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1}{1} = 1$$

Άρα $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 \\ f(1) = 1\end{cases}\right\} \Rightarrow f$ συνεχής στο 1.

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ με

$$f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)' = \frac{(x\ln x)'\cdot(x-1) - x\ln x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(\ln x + 1)\cdot(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{x\ln x} - \ln x + x - 1 - \cancel{x\ln x}}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}, \quad x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Όπως από γνωστή εφαρμογή του σχ. βιβλίου ισχύει $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x>0$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$)

Άρα $f'(x) = -\dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} > 0$, για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Δ3. • Για $x=1$ η σχέση $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$ ισχύει ως $f(1) = f(1) + \ln 1$ (αφού $\ln 1 = 0$).

• Για $0 < x \neq 1$ έχουμε:

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x\ln x}{x-1} - \frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} =$$

$$\frac{x\ln x}{x-1} - \left(-\frac{x\ln x}{x(1-x)}\right) = \frac{x\ln x}{x-1} - \frac{\ln x}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot\ln x}{x-1} = \ln x$$

Άρα $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$, για κάθε $x>0$.

Δ4. Για $x>0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1$. Άρα $f(e^x) =$

$$= \frac{e^x \ln e^x}{e^x - 1} = \frac{x e^x}{e^x - 1}$$

Επίσης για $x>0$ είναι: $e^{f(x)} \overset{(\Delta_3)}{=\!=} e^{f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x} = e^{f\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot e^{\ln x}$

$= x \cdot e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ Άρα το ζητούμενο όριο γράφεται

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x e^x}{e^x-1}}{x\cdot e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

Όμως $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-1} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$

και $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\substack{u\to 0^+ \\ \text{καθώς } x\to+\infty}}{\overset{u=1/x}{=\!=}} \lim_{u\to 0^+} f(u) = 0$ (από ερώτημα Δ1)

άρα $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} e^{f\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.$

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} = \frac{1}{1} = 1.$

ΤΕΛΟΣ