ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Παρασκευή 12 – 06 – 15
20:30

Spirit of Math

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
LISARI TEAM

ΘΕΜΑ Α
Σήφης Βοσκάκης

ΘΕΜΑ Β
Ανδρέας Μανώλης
Θανάσης Νικολόπουλος
Σταύρος Χαραλάμπους

ΘΕΜΑ Γ
Πάνος Γκριμπαβιώτης
Χρήστος Κουστέρης
Δημήτρης Δούδης

ΘΕΜΑ Δ
Θεόδωρος Παγώνης
Θωμάς Ποδηματάς
Σταύρος Σταυρόπουλος

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ
Μάκης Χατζόπουλος

ΘΕΜΑΤΑ & ΛΥΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των συνεργατών του διαδικτυακού τόπου

http://lisari.blogspot.gr

3η έκδοση: 13 – 06 – 2015 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό blog

http://lisari.blogspot.gr

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των **Επαναληπτικών** Πανελλαδικών Εξετάσεων στο μάθημα **Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης**. Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team. Προσπάθησαν και τα κατάφεραν να δώσουν πρώτοι διαδικτυακά τις πλήρεις λύσεις σε ένα αρχείο pdf!!**

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

12 – 06 – 2015

lisari ***team***

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστέρι)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Καστασταρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
***(νέο)** Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά – Βόλος)*
Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασίθι)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλιππίδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

lisari team / σχολικό έτος 2014 – 15

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΕΚΑΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (14)
(έκδοση Γ΄)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 304

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 151

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 279

Α4. α) Σωστό **,** σχολικό βιβλίο, σελίδα 91
β) Σωστό , σχολικό βιβλίο, σελίδα 166
γ) Λάθος, σχολικό βιβλίο, σελίδα 178
δ) Λάθος, σχολικό βιβλίο, σελίδα 281
ε) Λάθος, σχολικό βιβλίο, σελίδα 334

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$\begin{aligned}|z-3i|^2-18=|z-3|^2 &\Leftrightarrow (z-3i)(\bar z+3i)-18=(z-3)(\bar z-3)\\ &\Leftrightarrow \cancel{z\bar z}+3iz-3i\bar z-9i^2-18=\cancel{z\bar z}-3z-3\bar z+9\\ &\Leftrightarrow +3iz-3i\bar z+\cancel{9}-18=-3z-3\bar z+\cancel{9}\\ &\Leftrightarrow +3iz-3i\bar z+3z+3\bar z-18=0\\ &\Leftrightarrow 3i(x+yi)-3i(x-yi)+3(x+yi)+3(x-yi)-18=0\\ &\Leftrightarrow \cancel{3xi}-3y-\cancel{3xi}-3y+3x+\cancel{3yi}+3x-\cancel{3yi}-18=0\\ &\Leftrightarrow 6x-6y-18=0\\ &\Leftrightarrow x-y-3=0\end{aligned}$$

,όπου $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y-3=0$.

Β΄ τρόπος:
Αν θέσουμε στη δεδομένη σχέση $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}|x+yi-3i|^2-18=|x+yi-3|^2 &\Leftrightarrow |x+(y-3)i|^2-18=|(x-3)+yi|^2\\ &\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2-18=(x-3)^2+y^2\\ &\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6y+\cancel{9}-18=\cancel{x^2}-6x+\cancel{9}+\cancel{y^2}\\ &\Leftrightarrow 6x-6y-18=0\\ &\Leftrightarrow x-y-3=0\end{aligned}$$

Β2. Έστω $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, έχουμε,

$$|w-i|=\mathrm{Im}(w)+1\Leftrightarrow |x+yi-i|=y+1\Leftrightarrow |x+(y-1)i|=y+1$$

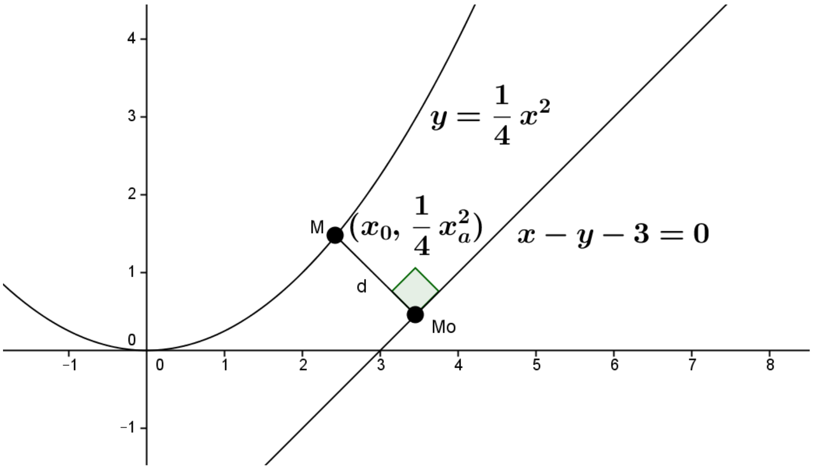
οπότε για $y+1\geq 0\Leftrightarrow y\geq -1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}|x+(y-1)i|^2=(y+1)^2 &\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(y+1)^2\\ &\Leftrightarrow x^2+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{y^2}+2y+\cancel{1}\\ &\Leftrightarrow x^2=4y\\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2\end{aligned}$$

Η τελευταία έπεται και ότι $y\geq 0$ άρα όλα τα σημεία ικανοποιούν και τον περιορισμό $y\geq -1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$.

Β3. Το $|z-w|$ ισούται με την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w. Δηλαδή εκφράζει την απόσταση των σημείων της ευθείας $(\varepsilon): x-y-3=0$ από τα σημεία της παραβολής C : $y=\frac{1}{4}x^2$.



Έστω $M(x_o, y_o)$ τυχαίο σημείο της παραβολής και A τυχαίο σημείο της ευθείας. Ψάχνουμε την ελάχιστη απόσταση (MA). Θεωρούμε την προβολή M_o του M στην ευθεία. Θα ισχύει $MA \geq MM_o$.

Επειδή $y_o=\frac{1}{4}{x_o}^2$ θα έχουμε $M\left(x_o, \frac{1}{4}x_0^2\right)$, άρα η απόσταση του M από την ευθεία (ε) είναι :

$$MM_o=d(M,\varepsilon)=\frac{|x_o-\frac{1}{4}x_o^2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x_o^2-4x_o+12|}{4\sqrt{2}}=\frac{|(x_o-2)^2+8|}{4\sqrt{2}}\geq\frac{8}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

(με το « = » να ισχύει για x = 2)

Β΄ τρόπος[1]:

Έχουμε $MM_o=d(M,\varepsilon)=\frac{|x_o-\frac{1}{4}x_o^2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x_o^2-4x_o+12|}{4\sqrt{2}}=\frac{x_o^2-4x_o+12}{4\sqrt{2}}$ (1)

(αφού $x_0^2-4x+12=(x-2)^2+8>0$)

Έστω $f(x)=x^2-4x+12,\quad A_f=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x-4$, $x\in\mathbb{R}$. Οπότε :

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-4>0 \Leftrightarrow x>2$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x-4<0 \Leftrightarrow x<2$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

[1] Χρειάζεται η δικαιολόγηση του Α΄ τρόπου επίλυσης, γιατί αναζητούμε τη κάθετη από το σημείο Μ της παραβολής στην ευθεία (ε).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	f_{min}	$\nearrow$

Άρα για $x=2$ η f έχει ελάχιστο το $f(2)=8$. Έτσι έχουμε $x_o^2-4x_o+12\geq 8$.

Άρα από την (1) έχουμε,

$$MM_o=d(M,\varepsilon)\geq \frac{8}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Γ΄ τρόπος

Για την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+12, x\in\mathbb{R}$, μπορούμε να πούμε ότι ως πολυωνυμική δευτέρου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου θετικό, παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-4}{2\cdot 1}=2$ το $f_{min}=f(2)=8$ και να συνεχίσουμε όπως παραπάνω).

Δ΄ τρόπος

Η παραβολή είναι κυρτή συνάρτηση, βρίσκουμε τη εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο (2, 1), από τύπους της Β΄ Λυκείου (ή από τον τύπο της εφαπτομένης)

$$x^2=2py\Leftrightarrow xx_1=p(y+y_1)\Leftrightarrow 2x=2(y+1)\Leftrightarrow y=x-1$$

που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) $y=x-3$, άρα το σημείο (2,1) της παραβολής είναι το πιο κοντινό σημείο της ευθείας (ε), οπότε….

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^{x-1} (εκθετική) και $\ln x$ (λογαριθμική), άρα

$$f'(x)=\left(e^{x-1}-\ln x\right)'=e^{x-1}-\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(1)=0 \text{ (προφανής ρίζα)}$$

Επομένως για :

$$x>1 \overset{f'\text{γν.αυξ}}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$$

$$x<1 \overset{f'\text{γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$$

Άρα ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

- $x\in(0,1]$ η f γνησίως φθίνουσα,
- $x\in[1,+\infty)$ η f γνησίως αύξουσα,
- Για $x=1$ έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

Εύρεση συνόλου τιμών:

Έχουμε,

$$A_1=(0,1] \qquad f(A_1)=\left[f(1),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=[1,+\infty)$$

αφού,

$$\lim_{x\to0^+}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}e^{x-1}-\lim_{x\to0^+}\ln x=e^{-1}-(-\infty)=+\infty$$

και

$$A_2=[1,+\infty) \qquad f(A_2)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$$

αφού,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{x-1}\cdot\left[1-\frac{\ln x}{e^{x-1}}\right]=(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-1}=+\infty,$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{x-1}} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{e^{x-1}} = 0\cdot 0 = 0$

Άρα

$$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[1,+\infty)$$

Γ2. Για την $h(x)=f(x^2+1)-f(2)+1$ έχουμε,

$$f(x)=e^{x-1}-\ln x,\ x>0 \text{ και } \varphi(x)=x^2+1 \quad x\in\mathbb{R}$$

οπότε,

$$A_{f\circ\varphi}=\{x\in A\varphi \,/\, \varphi(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+1>0\}$$

Άρα

$$A_{f\circ\varphi}=\mathbb{R}$$

Επομένως

$$A_h=\mathbb{R}$$

Για την $g(x)=\int_1^{h(x)}\sqrt{t^2-1}dt$ πρέπει :

$$t^2-1\geq 0 \Leftrightarrow t^2\geq 1 \Leftrightarrow t\leq -1 \text{ ή } t\geq 1$$

δηλαδή

$$t\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

Επειδή

$$1\in[1,+\infty) \text{ άρα } h(x)\geq 1 \Leftrightarrow f(x^2+1)-f(2)+1\geq 1 \Leftrightarrow f(x^2+1)\geq f(2) \quad (1)$$

Όμως

$$x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1$$

για κάθε $x\geq 1$ η είναι f γνησίως αύξουσα, άρα

$$(1)\Leftrightarrow f(x^2+1)\geq f(2) \quad \Leftrightarrow x^2+1\geq 2 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1 \text{ ή } x\geq 1$$

τελικά

$$A_g=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

Γ3. Έχουμε,

$$f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=f(1) \quad (1)$$

Για $x=1$ η f έχει ολικό ελάχιστο, δηλαδή

$$f(x) \geq f(1) \text{ για κάθε } x>0$$

Και το ίσον ισχύει μόνο για $\boxed{x=1}$, άρα

$$(1) \Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{3}{2}$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες .

- Το $\frac{3}{2} \in f(A_1)$ και η f συνεχής στο A_1 άρα υπάρχει $x_1 \in A_1 : f(x_1)=\frac{3}{2}$

Το x_1 μοναδικό διότι για κάθε $x \in A_1$ η f γνησίως φθίνουσα. Επίσης $x_1 \in (0,1)$ άρα : $x_1>0$

- Το $\frac{3}{2} \in f(A_2)$ και η f συνεχής στο A_2 άρα υπάρχει $x_2 \in A_2 : f(x_2)=\frac{3}{2}$

Το x_2 μοναδικό διότι για $x \in A_2$ η f γνησίως αύξουσα. Επίσης $x_2 \in [1,+\infty)$ άρα $x_2>0$

Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=\frac{3}{2}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες πράγμα που ισχύει και για την ισοδύναμη της: $f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1$.

Γ4. Έχουμε, $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 (1,+\infty)$ άρα

• Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι :

$$(\varepsilon)\, y-f(\xi)=f'(\xi)\cdot(x-\xi)$$

Για να διέρχεται από το $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$ αρκεί

$$\frac{3}{2}-f(\xi)=f'(\xi)\cdot(0-\xi) \Leftrightarrow \frac{3}{2}-f(\xi)=-\xi\cdot f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{3}{2}-f(\xi)+\xi\cdot f'(\xi)=0 \text{ με } \xi \in (x_1,1)$$

Αρκεί η εξίσωση $x\cdot f'(x)-f(x)+\frac{3}{2}=0$ να έχει μοναδική ρίζα στο $(x_1,1)$

Θεωρώ τη συνάρτηση :

$$\boxed{A(x)=x\cdot f'(x)-f(x)+\frac{3}{2}}\ x \in [x_1,1]$$

Η $A(x)$ συνεχής στο $[x_1,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$A(x_1)=x_1\cdot f(x_1)-f(x_1)+\frac{3}{2}=x_1\cdot f'(x_1)-\cancel{\frac{3}{2}}+\cancel{\frac{3}{2}}=x_1\cdot f'(x_1)<0$$

γιατί

$$x_1<1 \overset{f'\text{γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x_1)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x_1)<0$$

και

$$A(1)=1\cdot f'(1)-f(1)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}>0$$

Άρα θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1,1): A(\xi)=0$, δηλαδή η εξίσωση $x\cdot f'(x)-f(x)+\frac{3}{2}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Επίσης

$$A'(x)=\cancel{f'(x)}+x\cdot f''(x)-\cancel{f'(x)}=x\cdot f''(x)>0 \text{ ,για κάθε } x\in(x_1,1)$$

Άρα η $A(x)$ γνησίως αύξουσα, επομένως η ρίζα είναι μοναδική .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Διαιρούμε την αρχική σχέση με $x>0$ και έχουμε :

$$\left(x^2-x\right)f'(x)+xf(x)=1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)f'(x)+f(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left((x-1)f(x)\right)'=\left(\ln x\right)'$$

Άρα

$$(x-1)f(x)=\ln x+c \quad (1)$$

Όμως η αρχική σχέση για $x=1$ γίνεται : $\left(1-1\right)f'(1)+1f(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$

Οπότε η (1) για $x=1$ γίνεται : $\left(1-1\right)f(1)=\ln 1+c \Leftrightarrow c=0$

Επομένως θα έχουμε :

$$(x-1)f(x)=\ln x$$

Επίσης για $x\neq 1$ γίνεται

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$$

Επίσης f συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$, άρα

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1}=1$$

Β΄ τρόπος :

Επίσης f συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$, θα είναι και στο $x=1$ και επειδή από υπόθεση έχω ότι $f(1)=1$ άρα :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} & ,0<x\neq 1\\ 1 & ,x=1\end{cases}$$

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση :

$$k(x)=\int_1^x f(t)dt+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}dt \quad ,x>0$$

Επειδή f συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$ η k παραγωγίσιμη με :

$$k'(x)=f(x)+\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=f(x)-\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \quad (1)$$

- Αν $x=1$ τότε $k'(1)=f(1)-f(1)=0$
- Αν $x\neq 1$ τότε η (1) γίνεται,

$$k'(x)=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}}{x}=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{\dfrac{\frac{\ln x}{x-1}}{x}}{\frac{x}{1}}=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{\ln x}{x-1}=0$$

Οπότε για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$k'(x)=0\Rightarrow k(x)=c$$

και επειδή $k(1)=0$, θα έχουμε :

$$k(x)=0\Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}dt=0\Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{f(t)}{t}dt=0$$

Β΄ τρόπος (έκδοση γ΄)

Για τα ολοκληρώματα ισχύει το θεώρημα αντικατάστασης

$$\int_\alpha^\beta \gamma\big(\delta(x)\big)\cdot\delta'(x)dx=\int_{\delta(\alpha)}^{\delta(\beta)}\gamma(t)dt$$

όπου γ,δ' συνεχείς συναρτήσεις, $t=\delta(x)$ και $dt=\delta'(x)dx$

Τότε, για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, είναι

$$\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{f(t)}{t}dt=\int_{\delta(x)}^{\delta(1)}\gamma(t)dt\,,$$

όπου $\gamma(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $\delta(x)=\dfrac{1}{x}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Έτσι, αν εφαρμόσουμε το θεώρημα της αντικατάστασης από το 2^o στο 1^o μέλος έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{f(t)}{t}dt=\int_{\delta(x)}^{\delta(1)}\gamma(t)dt&=\int_x^1\gamma\big(\delta(x)\big)\delta'(x)dx\\&=\int_x^1\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'dx\\&=\int_x^1 x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\\&=\int_1^x\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx\end{aligned}$$

Όμως ,

$$\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\overset{0<x\neq1}{=}\frac{\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}-1}}{x}=\frac{\dfrac{-\ln x}{\frac{1-x}{x}}}{x}=\frac{\frac{x\cdot\ln x}{x-1}}{x}=\frac{\ln x}{x-1}=f(x)$$

άρα

$$\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{1}^{x}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx=\int_{1}^{x}f(x)dx \text{ για } x\in(0,1)\cup(1,+\infty).$$

Επίσης,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{1}^{x}f(x)dx \text{ για } x=1 \text{ τετριμμένα.}$$

Συνεπώς, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{1}^{x}f(x)dx$$

Δ3. α) Είναι

$$g(x)=-\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{1}^{x}f(t)\,dt, x>0$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη από την εκφώνηση, άρα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα

- Αν $0<x\neq 1$, τότε

$$g'(x)=\left(\int_{1}^{x}f(t)\,dt\right)'=f(x),\ 0<x\neq 1 .$$

- Αν $x=1$, τότε

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\int_{1}^{x}f(x)dt-0}{x-1}\right)\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\left(\frac{\left(\int_{1}^{x}f(x)dt\right)'}{(x-1)'}\right)=\lim_{x\to 1}f(x)\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1=f(1)$$

άρα $g'(x)=f(x)$, για κάθε $x>0$.

Τώρα,

- Αν $0<x\neq 1$: g' παραγωγίσιμη αφού f παραγωγίσιμη από την υπόθεση , με

$$g'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{\varphi(x)}{(x-1)^2}\ (4)$$

όπου $\varphi(x)=\frac{1}{x}(x-1)-\ln x, x>0$, παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}(x-1)+\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2}(x-1)$$

και

$$0<x<1\Rightarrow\varphi'(x)>0\Rightarrow\varphi:\text{γν.αύξουσα},\ \text{ενώ}\ x>1\Rightarrow\varphi'(x)<0\Rightarrow\varphi\ \text{γν. φθίνουσα}$$

οπότε έχουμε μέγιστο στο $x_0=1$ το $\varphi(1)=0$, άρα είναι $\varphi(x)\leq 0$, για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x_0=1$, άρα είναι $\varphi(x)<0$, για κάθε $0<x\neq 1$.

- Αν $x=1$,

$$g''(1)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{g'(x)-g'(1)}{x-1}\right)\overset{x\neq 1}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\right)\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}$$

$$\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=-\frac{1}{2},$$

άρα τελικά :

$$g''(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{(x-1)^2} & ,\ \text{αν}\ \ 0<x\neq 1\\ -\dfrac{1}{2} & ,\ \text{αν}\ \ x=1\end{cases},$$

οπότε είναι $g''(x)<0$, για κάθε $x>0$ άρα g: κοίλη στο $(0,+\infty)$.

Β΄ τρόπος
Μπορούσαμε να μελετήσουμε και τη μονοτονία της

$$g'(x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} & ,0<x\neq 1\\ 1 & ,x=1\end{cases},$$

χωρίς να βρίσκαμε την παράγωγο της g' στο $x_0=1$, απλά να λέγαμε ότι είναι συνεχής στο $x_0=1$ η g'!

β) Είναι $g''(x)<0$ άρα g': γν.φθίνουσα οπότε επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}g'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}g'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-1}=+\infty,$$

θα είναι

$$g'((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}g'(x),\lim_{x\to 0^+}g'(x)\right)=(0,+\infty),$$

άρα θα είναι $g'(x)>0$, για κάθε $x>0$ οπότε θα είναι g: γν.αύξουσα. Όμως $g(1)=0$ άρα το $x_0=1$ είναι και η μοναδική ρίζα της g .
Η εφαπτομένη του C_g στο $x_0=1$ είναι η

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=1(x-1) \text{ ή } (\varepsilon): y=x-1 .$$

Όμως το C_g στρέφει τα κοίλα κάτω, άρα $g(x)\le y_\varepsilon=x-1$, οπότε το ζητούμενο χωρίο θα είναι :

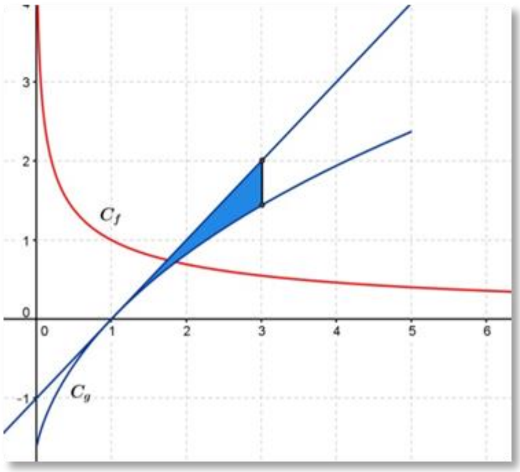
$$E=\int_1^3|g(x)-(x-1)|dx=\int_1^3[(x-1)-g(x)]dx=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^3-\int_1^3 g(x)dx=2-\int_1^3 g(x)dx \ (*)$$

Όμως η g: γν. αύξουσα και $g(1)=0$, άρα

$$1 \le x \le 3 \Rightarrow g(1) \le g(x) \le g(3) \Rightarrow g(x) \ge 0, \text{ για κάθε } x \in [1,3]$$

με την ισότητα να ισχύει ΜΟΝΟ όταν $x = 1$, άρα $g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [1,3]$ και όχι παντού 0 , οπότε $\int_1^3 g(x)dx > 0$.

Από την $(*)$ είναι φανερό ότι $E < 2$, όπως θέλαμε.



Δ4. Έχουμε,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \ge \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt \Leftrightarrow x\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \ge \int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt \Leftrightarrow x\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt - \int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt \ge 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{x}}^{x} (x-t)f(t)dt \ge 0 \quad (1)$$

Έχουμε,

$$t > 1 \Rightarrow \ln t > 0 \text{ και } t-1 > 0 \text{ άρα } \frac{\ln t}{t-1} > 0 \Rightarrow f(t) > 0$$

όμοια,

$$t < 1 \Rightarrow \ln t < 0 \text{ και } t-1 < 0 \text{ άρα } \frac{\ln t}{t-1} > 0 \Rightarrow f(t) > 0$$

δηλαδή

$$f(t) > 0 \text{ για } t \ne 1 \text{ και } f(1) = 1 > 0, \text{ άρα } f(t) > 0 \text{ για κάθε } t > 0$$

- Για x = 1 η (1) ισχύει ως ισότητα.
- Για x > 1 έχουμε

$$\frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{x} < 0 \text{ και } t \in \left[\frac{1}{x}, x\right] \Rightarrow x - t \ge 0$$

Οπότε $(x-t)f(t)\geq 0$ και επειδή δεν είναι παντού μηδέν και η $h(t)=(x-t)f(t)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών είναι $\int_{\frac{1}{x}}^{x}(x-t)f(t)dt>0$

• Για $0<x<1$ έχουμε

$$\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}>0 \text{ και } t\in\left[\frac{1}{x},x\right]\Rightarrow x-t\leq 0$$

Οπότε $(x-t)f(t)\leq 0$ και επειδή δεν είναι παντού μηδέν και η $h(t)=(x-t)f(t)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών είναι

$$\int_{x}^{\frac{1}{x}}(x-t)f(t)dt<0\Rightarrow -\int_{x}^{\frac{1}{x}}(x-t)f(t)dt>0\Rightarrow \int_{\frac{1}{x}}^{x}(x-t)f(t)dt>0$$

Άρα

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x}(x-t)f(t)dt\geq 0 \text{ για κάθε } x>0.$$