



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

- A. i) Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της A . Μονάδες 2
- ii) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησιώς αύξουσα σε ενα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 3
- B. Να γράψετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες που ισχύουν για την σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1,2,\dots,k$ του δείγματος μεγέθους $n \geq k$, των τιμών μιας μεταβλητής X . Μονάδες 10
- Γ. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις.
1. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων. Μονάδες 2
 2. Αν για τις αθροιστικές συχνότητες N_i , $i=1,2,3,4,5$ ενός δείγματος τιμών x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 της μεταβλητής X , ισχύει $N_i = 4 \cdot i^2 + 2i$, τότε το μέγεθος του δείγματος είναι $n=110$. Μονάδες 2
 3. Σε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος ισούται με την διαφορά της κεντρικής τιμής της πρώτης κλάσης από την κεντρική τιμή της τελευταίας κλάσης. Μονάδες 2
 4. Σε κανονική κατανομή ισχύει: $\bar{x} = \delta$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή και δ η διάμεσος της. Μονάδες 2
 5. Αν για τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ δύο ενδεχομένων A , B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι $P(A) \leq P(B)$ τότε ισχύει πάντα $A \subseteq B$. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Έστω t_1, t_2, \dots, t_{100} ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής T με μέση τιμή \bar{t} , τυπική απόκλιση $s \neq 0$ και η συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)}{\sqrt{x - 2}}, & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } x \neq 4 \\ -24 \cdot s, & \text{αν } x = 4 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $A = [0, +\infty)$.

- α)** Να αποδείξετε ότι για $x \neq 4$ ο τύπος της συνάρτησης F είναι

$$F(x) = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2).$$

- β)** Να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές το δείγμα των τιμών t_1, t_2, \dots, t_{100} της μεταβλητής T .

Μονάδες 10

- γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \frac{F(x)}{\bar{t} - 2s}$ στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

Ο κυβισμός των κινητήρων X , σε κυβικά εκατόστα (κ.εκ.), ενός δείγματος 4.000 αυτοκινήτων, ακολουθεί κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 100 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. και 3.360 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ.

- α)** Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} , την τυπική απόκλιση s και να εκτιμήσετε το εύρος R του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

Μονάδες 12

- β)** Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο από το δείγμα. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ. ή μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Μονάδες 7

- γ)** Αν, μετά από επίσκεψή, ο κυβισμός κάθε κινητήρα αυξηθεί κατά 6%, να βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά των νέων τιμών του, και να εκτιμήσετε το εύρος τους.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4°

Δίνονται τα ενδεχόμενα K , Λ ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(K)$, $P(\Lambda)$ αντίστοιχα, όπου $P(K) \neq 0$.

α) Η συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot [x - P(\Lambda)]^2 + x \cdot P(K), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ μέγιστο το $\frac{5}{2} \cdot [P(K)]^2$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) $x_0 = P(K) + P(\Lambda)$
- ii) $P(\Lambda) = 2 \cdot P(K)$

β) Έστω, επιπλέον, ότι οι παρατηρήσεις:

$$P(\emptyset), P(K), P(\Lambda), P(K \cup \Lambda), P(\Omega), P(K), P(\emptyset), P(K), P(K \cup \Lambda), P(K \cap \Lambda)$$

έχουν διάμεσο $\delta = \frac{1}{4}$ και $P[(K - \Lambda) \cup (\Lambda - K)] = \frac{2}{3}$.

- i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: K , Λ , $K \cap \Lambda$, $K \cup \Lambda$.

Μονάδες 12

- ii) Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των παραπάνω παρατηρήσεων. Μονάδες 3

