ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεωρία - Σχολικό βιβλίο σελ. 253

Α2 Θεωρία - Σχολικό βιβλίο σελ. 141

Α3 α – σωστό, β – σωστό, γ – λάθος, δ – λάθος, ε – σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$.

Είναι $|z+4| = 2|z+1| \Leftrightarrow |x+yi+4| = 2|x+yi+1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(x+4)+yi| = 2|(x+1)+yi| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+8x+16+y^2 = 4(x^2+2x+1+y^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 2.

Β2. • Η εικόνα του z_1 είναι το σημείο τομής του κύκλου με τον θετικό ημιάξονα Ox.

Για y = 0 η εξίσωση του κύκλου γίνεται:

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$ (που απορρίπτεται γιατί x > 0).

Άρα $z_1 = 2$.

• Η εικόνα του z_2 είναι το σημείο τομής του κύκλου με τον αρνητικό ημιάξονα Oy΄.

Για x = 0 η εξίσωση του κύκλου γίνεται:

$y^2 = 4 \Leftrightarrow y = -2$ ή $y = 2$ (που απορρίπτεται γιατί y < 0).

Άρα $z_2 = -2i$.

Β3. $(z_1 - z_2)^{20} - (z_1 + z_2)^{20} =$

$= (2+2i)^{20} - (2-2i)^{20} =$

$= (2+2i)^{20} - (-2i^2 - 2i)^{20} =$

$= (2+2i)^{20} - [-i(2+2i)]^{20} =$

$$= (2+2i)^{20} - i^{20}(2+2i)^{20} =$$
$$= (2+2i)^{20} - i^{0}(2+2i)^{20} =$$
$$= (2+2i)^{20} - (2+2i)^{20} = 0 \text{ γιατί } i^{20} = i^{4\cdot 5+0} = i^{0} = 1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty$.

Άρα η ευθεία **x = 0** είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της c_f.

• Αναζητούμε οριζόντια ασύμπτωτη.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

Άρα η ευθεία **y = 0** είναι οριζόντια ασύμπτωτη της c_f στο $+\infty$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'\cdot x - (\ln x)\cdot(x)'}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \underset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$.

• $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$.

Πίνακας προσήμου της $f'(x)$

x	0			$+\infty$
f΄(x)	‖	+	0	−
f(x)	‖	↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x = e το $f(e) = \frac{1}{e}$.

Άρα $f(x) \le f(e) \Leftrightarrow f(x) \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow e\cdot f(x) \le 1$ για κάθε $x > 0$.

Γ3. $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Σημείο τομής της c_f με τον x΄x το (1,0).

Για κάθε $x\in\left[\dfrac{1}{e},1\right]$ είναι $\ln x\le 0$.

Άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\left[\dfrac{1}{e},1\right]$.

Επειδή η f είναι συνάρτηση συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{e},1\right]$ ισχύει:

$$E(\Omega)=\int_{1/e}^{1}\left(-f(x)\right)dx=-\int_{1/e}^{1}\frac{\ln x}{x}dx=-\int_{1/e}^{1}(\ln x)'\ln x dx=$$

$$=-\int_{1/e}^{1}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]'dx=-\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1/e}^{1}=$$

$$=-\frac{(\cancelto{0}{\ln 1})^2}{2}+\frac{\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2}{2}=\frac{(-1)^2}{2}=\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=(2^x+x^2-2x-1)'=2^x\ln 2+2x-2$ και

$f''(x)=(2^x\ln 2+2x-2)'=2^x\ln^2 2+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Προφανώς $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

• Είναι $f(0)=2^0-1=1-1=0$ και $f(1)=2+1-2-1=0$.

Άρα οι αριθμοί $x_1=0$ και $x_2=1$ είναι 2 ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Έστω ότι η εξίσωση έχει και μία τρίτη ρίζα x_3 διαφορετική των x_1 και x_2.

(Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $x_1<x_2<x_3$).

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\ f \text{ συνεχής στο } [x_1,x_2]\\&\bullet\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x_1,x_2)\\&\bullet\ f(x_1)=f(x_2)=0\end{aligned}\right\}\overset{\text{Θ.Rolle}}{\Leftrightarrow}\ \text{υπάρχει } x_o\in(x_1,x_2) \text{ ώστε } f'(x)=0.$$

Όμοια:

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\ f \text{ συνεχής στο } [x_2,x_3]\\&\bullet\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x_2,x_3)\\&\bullet\ f(x_2)=f(x_3)=0\end{aligned}\right\}\overset{\text{Θ.Rolle}}{\Leftrightarrow}\ \text{υπάρχει } \rho\in(x_2,x_3) \text{ ώστε } f'(\rho)=0.$$

Επίσης:

- f' συνεχής στο $[x_o, \rho]$
- f' παραγωγίσιμη στο (x_o, ρ) με $f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2$
- $f'(x_o) = f'(\rho) = 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_o, \rho)$ ώστε $f''(\xi) = 0$ (άτοπο αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Δ2. Στο (Δ_1) δείξαμε ότι υπάρχει $x_o \in (0,1)$ ώστε $f'(x_o) = 0$.

Επομένως η εφαπτομένη της c_f στο σημείο της $A(x_o, f(x_o))$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$. Επομένως το $x_o \in (0,1)$ είναι μοναδικό.

Δ3. • f' γνησίως αύξουσα στο $[0, x_o]$ (από Δ_2).

Συνεπώς $0 < x < x_o \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(x) < f'(x_o) \Leftrightarrow \ln 2 - 2 < f'(x) < 0$ και

$x_o < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x_o) < f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow 0 < f'(x) < 2\ln 2$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, x_o]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_o, 1]$

Έτσι για $0 < x < x_o \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(0) > f(x) > f(x_o) \Leftrightarrow 0 > f(x) > f(x_o)$

και για $x_o < x < 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_o) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x_o) < f(x) < 0$.

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

• Προφανής λύση της εξίσωσης είναι x = 1 αφού $\int_1^1 f(t)dt = 1 - 1 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_1^x f(t)dt - x + 1,\ x \in [0,1]$ με $g(1) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt,\ x \in [0,1]$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική συνεχούς συνάρτησης.

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = \left(\int_1^x f(t)dt - x + 1 \right)' = f(x) - 1 < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1) \text{ (από } \Delta_3).$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ επομένως και 1 – 1.

Συνεπώς η $x = 1$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$.

ΚΟΥΡΤΟΓΛΟΥ ΘΕΑΓΕΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ – ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΣ