Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελλαδικών εξετάσεων 2014
Στο μάθημα: « Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης»
ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕ.Λ. (και ΕΠΑ.Λ. Ομάδα Β)
Γ΄Λυκείου,

Σάββατο , 21 Ιουνίου 2014

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία -απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 262 (μόνο το iii) στο σχολικό βιβλίο.

Α2. Θεωρία-διατύπωση θεωρήματος στη σελίδα 192 στο σχολικό βιβλίο.

Α3. Θεωρία-ορισμός στη σελίδα 303 στο σχολικό βιβλίο.

Α4. **α) Σωστό , β) Σωστό, γ) Λάθος[1], δ) Λάθος[2], ε) Σωστό[3]**

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Για $z \neq -\frac{i}{2}$ έχουμε διαδοχικά:

$$w = \frac{2z-i}{2z+i} \in \text{Im} \Leftrightarrow \overline{w} = -w \Leftrightarrow \frac{2\overline{z}+i}{2\overline{z}-i} = -\frac{2z-i}{2z+i} \Leftrightarrow (2\overline{z}+i)(2z+i) = -(2\overline{z}-i)(2z-i)$$

$$\Leftrightarrow 8z\overline{z} = 2 \Leftrightarrow z\overline{z} = \frac{1}{4}$$

Αν θέσουμε: $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ τότε η παραπάνω σχέση γίνεται: $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ που είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$. Επειδή $z \neq 0 - \frac{1}{2}i$, θα έχουμε εξαίρεση του σημείου $M(0, -\frac{1}{2})$.

---

[1] Είναι: $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$ $(0 < a < 1)$

[2] Υπάρχει αντιπαράδειγμα στο σχόλιο της σελίδας 274 στο σχολικό βιβλίο.

[3] Υπάρχει στη σελίδα 334 στο σχολικό βιβλίο.

Β2.

Έχουμε διαδοχικά: $|w|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{2z-i}{2z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |2z-i|=|2z+i| \Leftrightarrow |2z-i|^2=|2z+i|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2z-i)(2\overline{z}+i)=(2z+i)(2\overline{z}-i) \Leftrightarrow 4zi=4\overline{z}i \Leftrightarrow z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$$

Αφού θέσαμε $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ θα είναι $z=x$ $(y=0)$ και επειδή οι μιγαδικοί z είναι αυτοί του Β1 ερωτήματος, θα είναι: $x^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$.

Έτσι θα είναι τελικά : $x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ ή $x=-\frac{1}{2}$ και $y=0$. Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι : $\begin{matrix} z_1=\frac{1}{2} \\ z_2=-\frac{1}{2} \end{matrix}$.

Β3.

Για $z=\frac{1}{2}\Rightarrow w=\frac{1-i}{1+i}\Rightarrow w=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\Rightarrow w=\frac{(1-i)^2}{2}\Rightarrow w=\frac{-2i}{2}\Rightarrow w=-i$

Άρα έχουμε: $w^4+iw^7=(-i)^4+i(-i)^7=1+i\cdot i=1-1=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $x_0=0$ θα πρέπει να ισχύει: $\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)=0$.

Έχουμε: $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$ (1) και θέτουμε $u=\frac{\ln x}{x}$. Έτσι όταν $x\to0^+$ τότε $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$. Άρα $u\to-\infty$ και το όριο (1) γίνεται: $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{u\to-\infty} e^u=0$ και άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Γ2. Η συνάρτηση $f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}, x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=e^{\frac{\ln x}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$. Τώρα έχουμε:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$ και έτσι:

$x > e \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ *γνησίως φθίνουσα στο* $[e, \infty)$
$0 < x < e \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ *γνησίως* αύξουσα *στο* $(0, e]$

Ο πίνακας προσήμου της $f'(x)$ είναι:

	0	e ∞
x		
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

Άρα[4] η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_1 = e$ το $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ και ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 0$ (αφού η f είναι συνεχής και στο 0). Άρα $f(0) \le f(x) \le f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ για κάθε $x > 0$ ή $0 \le f(x) \le e^{\frac{1}{e}}$ για κάθε $x > 0$ και άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[0, e^{\frac{1}{e}}]$.

Γ3.

i) Έχουμε τις διαδοχικές ισοδυμαμίες:

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln 4}{4}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow 4\ln x = x\ln 4 \Leftrightarrow \ln x^4 = \ln 4^x \Leftrightarrow x^4 = 4^x$$

ii) Η εξίσωση $x^4 = 4^x$ έχει προφανώς ρίζες το 2 και το 4 (αφού αντίστοιχα: $2^4 = 4^2 = 16$ και $4^4 = 4^4$). Αν τώρα υποθέσουμε ότι έχει και άλλη ρίζα, έστω $x_3 > 0$ με $x_3 \neq 2, x_3 \neq 4$, τότε αυτή θα είναι ρίζα και της ισοδύναμής της εξίσωσης $f(x) = f(4)$, δηλαδή της συνάρτησης $g(x) = f(x) - f(4), x > 0$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $x_3 > 4$.Όμοια και γιατις άλλες περιπτώσεις). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα [2,4] και [4, x_3] ,αφού σε κάθε ένα από αυτά η $g(x)$ είναι προφανώς παραγωγίσιμη, θα έχουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (2,4)$, τέτοιο ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (4, x_3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2) = 0$.

Άρα έχουμε:

$$g'(\xi_1) = 0 \Rightarrow f'(\xi_1) = 0 \Rightarrow e^{\frac{\ln \xi_1}{\xi_1}} \frac{1 - \ln \xi_1}{\xi_1^{\ 2}} = 0 \Rightarrow \xi_1 = e$$

$$g'(\xi_2) = 0 \Rightarrow f'(\xi_2) = 0 \Rightarrow e^{\frac{\ln \xi_2}{\xi_2}} \frac{1 - \ln \xi_2}{\xi_2^{\ 2}} = 0 \Rightarrow \xi_2 = e$$

δηλαδή $\xi_1 = \xi_2$ που είναι άτοπο (αφού έχουμε $\xi_2 > \xi_1$) και άρα η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες τις 2 και 4.

[4] Μπορώ και με την μονοτονία της συνάρτησης να βρώ το σύνολο τιμών(αφού η f είναι συνεχής), δηλαδή $[f(0), f(e)] \cup (\lim_{x\to\infty} f(x), f(e)] = [0, e^{\frac{1}{e}}] \cup (1, e^{\frac{1}{e}}] = [0, e^{\frac{1}{e}}]$

Γ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $F(x)=(f(x)-\sqrt{2})\int_2^x f(t)dt,\ x\in[2,4]$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle στο [2,4].

- Η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [2,4] (άρα και συνεχής) αφού είναι γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων των $f(x)-\sqrt{2}$ και $\int_2^x f(t)dt$ + (αφού η $f(x)$ συνεχής στο [2,4]).

Η παράγωγος της F είναι: $F'(x)=f'(x)\int_2^x f(t)dt+(f(x)-\sqrt{2})f'(x)$, $x\in[2,4]$.

- $F(2)=0$
- $F(4)=(f(4)-\sqrt{2})\int_2^4 f(t)dt=(e^{\frac{\ln 2}{2}}-\sqrt{2})\int_2^4 f(t)dt=(\sqrt{2}-\sqrt{2})\int_2^4 f(t)dt=0$

Άρα υπάρχει ένα , τουλάχιστον, $\xi\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε:

$F'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)\int_2^{\xi} f(t)dt+(f(\xi)-\sqrt{2})f'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)\int_2^{\xi} f(t)dt=f'(\xi)(\sqrt{2}-f(\xi))$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$, το 1^{ο} μέλος της δοθείσας σχέσης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) , όπως προφανώς παραγωγίσιμη είναι η συνάρτηση του 2^{ου} μέλους. Παραγωγίζοντας[5] λοιπόν τα μέλη της δοθείσας σχέσης έχουμε διαδοχικά (όχι ισοδύναμα):

$$e^{f(x)}(f^2(x)-2f(x)+3)=x$$
$$e^{f(x)}f'(x)[f^2(x)-2f(x)+3]+e^{f(x)}[2f(x)f'(x)-2f'(x)]=1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x)-2f(x)f'(x)+3f'(x)+2f(x)f'(x)-2f'(x)]=1$$
$$e^{f(x)}[f'(x)f^2(x)+f'(x)]=1\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)(f^2(x)+1)=1$$
$$f'(x)=\frac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1}>0, x\in(0,\infty)\Rightarrow Η\ f είναι\ γνησίως\ αύξουσα\ στο\ (0,\infty)\ άρα\ και\ "1-1"\ και\ άρα\ αντιστρέψιμη$$

Για την εύρεδη της αντίστροφης συνάρτησης θέτουμε: $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ με $x\in A=(0,\infty)$ και $y\in f(A)=\mathbb{R}$.

Άρα, θα έχουμε από την δοθείσα σχέση: $e^y(y^2-2y+3)=f^{-1}(y), y\in\mathbb{R}$ ή $f^{-1}(x)=e^x(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$

---

[5] Μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την παραγωγισιμότητα της f με ιδιότητες της ισότητας.

Δ2.

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)=e^x(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $\left(f^{-1}(x)\right)'=e^x(x^2-2x+3)+e^x(2x-2)=e^x(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$
Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $\left(f^{-1}(x)\right)''=e^x(x^2+1)+2xe^x=e^x(x+1)^2,\ x\in\mathbb{R}$,
δηλαδή $\left(f^{-1}(x)\right)''>0,\ x\in\mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η $f^{-1}(x)$ είνα κυρτή στο $\mathbb{R}$ (στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$).

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ τέμνει τον άξονα x΄x όταν $x=0\Rightarrow f^{-1}(0)=3$ δηλαδή στο σημείο $A(0,3)$. Αν θέσουμε $g(x)=f^{-1}(x),\ x\in\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α είναι :
$y-3=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+3$.($g'(0)=(f^{-1})'(0)=3$)

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:
$$E=\int_0^1\left|f^{-1}(x)-(x+3)\right|dx=\int_0^1[e^x(x^2-2x+3)-x-3]dx=\int_0^1 x^2e^xdx-2\int_0^1 xe^xdx+3\int_0^1 e^x-[\frac{x^2}{2}]_0^1-3[x]_0^1=4e-\frac{21}{2}\tau.\mu.$$
(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f^{-1} είναι κυρτή δηλαδή ότι $f^{-1}(x)\geq x+3,\ x\in\mathbb{R}$)

Δ3.

i)[6] Έχουμε: $f'(x)=\dfrac{e^{-f(x)}}{f^2(x)+1},\ x\in(0,\infty)$ και $\left(f^{-1}(x)\right)'=e^x(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$
Άρα :

$$f'(f^{-1}(x)=\frac{e^{-f(f^{-1}(x))}}{[f(f^{-1}(x))]^2+1}=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$$
$$f'(f^{-1}(x))\cdot[f^{-1}(x)]'=\frac{e^{-x}}{x^2+1}\cdot e^x(x^2+1)=1$$

ii) Η απόσταση των Α και Β είναι :

$$(\mathrm{AB})^2=2(x-f^{-1}(x))^2,\ x\in\mathbb{R}$$
$$(\mathrm{AB})=\sqrt{2}\left|x-f^{-1}(x)\right|,\ x\in\mathbb{R}$$
$$(\mathrm{AB})=\sqrt{2}(f^{-1}(x)-x),\ x\in\mathbb{R}$$

(Χρησιμοποιήσαμε $f^{-1}(x)\geq x+3>x,\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow f^{-1}(x)-x>0$).

---

[6] Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και γενικότερα αφού : $f(f^{-1}(x))=x, x\in D_{f^{-1}}$ και παραγωγίζοντας τα μέλη της έχουμε $f'(f^{-1}(x))\cdot[f^{-1}(x)]'=1$.Επίσης τα σημεία $A(x,f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x),x)$ είναι συμμετρικά ως προς την $y=x$.

Αν θέσουμε : $h(x)=\sqrt{2}(f^{-1}(x)-x)=\sqrt{2}[e^x(x^2-2x+3)-x], x\in\mathbb{R}$ θα έχουμε ότι η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων) με $h'(x)=\sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1], x\in\mathbb{R}$

Έχουμε: $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ μοναδικό, διότι η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x(x^2+1)-1, x\in\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1» αφού η $\varphi'(x)=e^x(x+1)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και άρα γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τώρα έχουμε:

- $x<0 \Rightarrow \varphi(x)<\varphi(0) \Rightarrow \varphi(x)<0 \Rightarrow e^x(x^2+1)-1<0 \Rightarrow \sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]<0 \Rightarrow$
  $\eta\ h(x)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma$ φθίνουσα $\sigma\tau o\ (-\infty,0]$

- $x>0 \Rightarrow \varphi(x)>\varphi(0) \Rightarrow \varphi(x)>0 \Rightarrow e^x(x^2+1)-1>0 \Rightarrow \sqrt{2}[e^x(x^2+1)-1]>0 \Rightarrow$
  $\eta\ h(x)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma$ αύξουσα $\sigma\tau o\ [0,\infty)$

και άρα η συνάρτηση $h(x)$ (μπορεί να φανεί πιο καθαράαπό τον πίνακα προσήμου της $h'(x)$) έχει ελάχιστο στο $x_0=0$, το $h(0)=\sqrt{2}(f^{-1}(0))=3\sqrt{2}$, δηλαδή $(AB)_{\min}=3\sqrt{2}$.

Επιμέλεια λύσεων

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών