ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 225

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 97

Α3. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z - i| = 1 + \text{Im}(z) \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - i| = 1 + y \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 1 + y \overset{y > -1}{\Leftrightarrow} x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1} \Leftrightarrow x^2 = 4y \Leftrightarrow \mathbf{y = \frac{1}{4}x^2}$

Β2. $w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \Leftrightarrow w\bar{w} + 3wi = 3\bar{w}i - 1 \Leftrightarrow$

$|w|^2 + 3(w - \bar{w})i + 1 = 0 \Leftrightarrow \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 + 3 \cdot 2yi \cdot i + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 8 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 8$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 8 = 2\sqrt{2}$

Β3. Αναζητούμε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων

$$\begin{cases} x^2 = 4y \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} 4y + y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

$(1) \overset{y=1}{\Rightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Άρα **$A(2, 1)$** και **$B(-2, 1)$**.

Β4. Είναι $Λ(0, -1)$ και

$(ΚΑ) = (ΚΒ) = (ΛΑ) = (ΛΒ) = 2\sqrt{2} \rightarrow$ ΚΑΛΒ ρόμβος

$(ΑΒ) = (ΚΛ) = 4 \rightarrow$ ΚΑΛΒ ορθογώνιο

Άρα **το ΚΑΛΒ είναι τετράγωνο**.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x'(t) = 16 \Leftrightarrow x'(t) = (16t)'$, $t \geq 0$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $x(t) = 16t + c$, $t \geq 0$

Για $x = 0$ είναι $x(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, άρα $\mathbf{x(t) = 16t, t \geq 0}$

Γ2. Παρατήρηση : Έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει την οπτική επαφή με το κινητό στο Α.

Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

(ε) : η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το Π (0 , 1).

$$(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(x - x_0)$$

$$\Pi \in C_f \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(-x_0) \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} - 2x_0 = -x_0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x_0} = x_0 \Leftrightarrow 4x_0 = x_0^2 \Leftrightarrow \cancel{x_0 = 0} \text{ ή } x_0 = 4$$

Για $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2 \rightarrow$ **Α (4 , 2)**

$$x(t_0) = 4 \Leftrightarrow 16t_0 = 4 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4}\text{min} \text{ ή } t_0 = 15\text{sec}$$

Επομένως **η οπτική επαφή διαρκεί 15 δευτερόλεπτα**

Γ3. $y(t) = \sqrt{x(t)}$, άρα $y'(t) = \left(\sqrt{x(t)}\right)' = \dfrac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}} = \dfrac{16}{2\sqrt{16t}} = \dfrac{2}{\sqrt{t}}$

$$y'(t_0) = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{t_0}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{t_0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4}$$

Άρα **ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι 4 m/min**

τη χρονική στιγμή $t_0 = \dfrac{1}{4}$min ή $t_0 = 15$sec.

Γ4. $M(x , y) \rightarrow M(x , \sqrt{x}) \rightarrow M(16t , 4\sqrt{t})$

$$d(t) = (\Pi M) = \sqrt{(16t - 0)^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}\right)' = \frac{256t + 8 - \dfrac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(t) = 256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}, t > 0$

$g'(t) = 256 + \frac{1}{t\sqrt{t}} > 0$, άρα η g είναι γν.αύξουσα στο $(0, +\infty)$

1ος τρόπος

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών
- $g\left(\frac{1}{64}\right) = 4 + 8 - 16 = -4 < 0$
- $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68 > 0$

Από Θ. Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα t_0 στο $\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2ος τρόπος

- Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = \left(0, \frac{1}{4}\right]$
- $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) = -\infty$
- $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68$

Άρα $g(\Delta) = (-\infty, 68]$.

Είναι $0 \in (-\infty, 68]$, άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

$d'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(t_0) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x > t_0$

x	0		t_0		$+\infty$
d´(x)		-	0	+	
d (x)		↘		↗	

Η d είναι γν.φθίνουσα στο $(0, t_0]$ και γν.αύξουσα στο $[t_0, +\infty)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x-\beta}\right)' = -\frac{2\alpha}{x^3} + \frac{1}{(x-\beta)^2}$

$A\left(-2\,,\,\frac{5}{12}\right) \in C_f \Leftrightarrow f(-2) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{\beta+2} = \frac{5}{12}$ **(1)**

$f'(-2) = \frac{5}{18} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{(\beta+2)^2} = \frac{5}{18}$ **(2)**

Από (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

$\frac{1}{(\beta+2)^2} - \frac{1}{\beta+2} = -\frac{5}{36}$

Θέτουμε όπου $\frac{1}{\beta+2} = \omega \rightarrow \omega^2 - \omega + \frac{5}{36} = 0$

$\Delta = \frac{4}{9}$ και ρίζες $\omega_1 = \frac{5}{6}$ και $\omega_2 = \frac{1}{6}$

- $\omega_1 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta+2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \beta + 2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \beta = -\frac{4}{5} \notin Z$
- $\omega_2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta+2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \beta + 2 = 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 4} \in Z$

$(1) \overset{\beta=4}{\Rightarrow} \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \overset{\cdot 12}{\Leftrightarrow} 3\alpha + 2 = 5 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

Δ2. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}, x \in IR - \{0\,,\,4\}$

$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{(x-4)^2}, x \in IR - \{0\,,\,4\}$

Για $x \neq 0$ και $x \neq 4$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = \frac{1}{(x-4)^2} \Leftrightarrow x^3 = 2(x-4)^2 \Leftrightarrow$

$x^3 = 2(x^2 - 4x + 16) \Leftrightarrow$

$x^3 = 2x^2 - 8x + 32 \Leftrightarrow$

$x^3 - 2x^2 + 16x - 32 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f΄(x)		+	‖	-	○	+	‖	+	
f		↗	‖	↘		↗	‖	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty , 0)$, $[2 , 4)$ και $(4 , +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0 , 2]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο την τιμή $f(2) = \frac{3}{4}$.

Δ3. • $\Delta_1 = (-\infty , 0)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = (0 , +\infty)$$

• $\Delta_2 = (0 , 2]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = +\infty \\ f(2) = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left[\frac{3}{4} , +\infty\right)$$

• $\Delta_3 = (2 , 4)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_3

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f(2) = \frac{3}{4} \\ \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_3) = \left(\frac{3}{4} , +\infty\right)$$

• $\Delta_4 = (4 , +\infty)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_4

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_4) = (-\infty , 0)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) =$ **$(-\infty , 0) \cup (0 , +\infty)$** ή **IR***.

Δ4. Εξίσωση : $\kappa x^3 + (1 - 4\kappa)x^2 - x + 4 = 0$ (1).

- Η (1) για $x = 0$ δίνει $4 = 0 \rightarrow$ άτοπο
- Η (1) για $x = 4$ δίνει $16 = 0 \rightarrow$ άτοπο

Άρα για $x \neq 0$ και $x \neq 4$ η (1) γίνεται

$\kappa x^3 + (1 - 4\kappa)x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\kappa x^3 + x^2 - 4\kappa x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\kappa x^3 - 4\kappa x^2 = x - 4 - x^2 \Leftrightarrow$

$\kappa x^2(x - 4) = x - 4 - x^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{\kappa x^2(x-4)}{x^2(x-4)} = \frac{x-4}{x^2(x-4)} - \frac{x^2}{x^2(x-4)} \Leftrightarrow$$

$$\kappa = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \Leftrightarrow$$

$f(x) = \kappa$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

$\kappa < 0$	$\kappa \notin f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \in f(\Delta_4)$	1 ρίζα
$\kappa = 0$	$\kappa \notin f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	0 ρίζες
$0 < \kappa < \frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	1 ρίζα
$\kappa = \frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \in f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	2 ρίζες
$\kappa > \frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \in f(\Delta_2)$	$\kappa \in f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	3 ρίζες

Επομένως το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) είναι

$$L = \begin{cases} 0, \text{ αν } \kappa = 0 \\ 1, \text{ αν } \kappa \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{4}\right) \\ 2, \text{ αν } \kappa = \frac{3}{4} \\ 3, \text{ αν } \kappa \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \end{cases}$$