ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΚΕΛΑΦΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 224

2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

Β. **1.** ΛΑΘΟΣ

2. ΣΩΣΤΟ

3. ΣΩΣΤΟ

4. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

α.i. $|z - 1 + i| = |iz| \Leftrightarrow \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z|$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

η μεσοκάθετος του ΑΟ, με Α (1, - 1) και Ο (0 , 0).

Αν $z = x + yi$, τότε $|x + yi - 1 + i| = |x + yi| \Leftrightarrow$

$|(x - 1) + (y + 1)i| = |x + yi| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$-2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow -x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = x - 1}$ (1)

ii. Από τη σχέση (1) έχουμε ότι $z = x + (x - 1)i$, άρα M (x , x - 1).

$(MO) = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (x - 1)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$x^2 + (x - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$

- για $x = -1 \rightarrow$ **M (-1 , - 2)**
- για $x = 2 \rightarrow$ **M (2 , 1)**

β. $Re(z) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y = -1$ άρα $\mathbf{z = -i}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)} = 0$

$f(2) = \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 6}{2 \cdot (2-1)} = 0$

άρα **η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.**

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-\frac{1}{8}(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \left[-\frac{1}{8}(x+2)\right] = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

άρα $\mathbf{f'(2) = -\frac{1}{2}}$.

β. Για $x < 2$ είναι $f'(x) = \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}\right)' = -\frac{1}{4}x$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ και $f'(0) = 0$, άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι

$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$ **$(\varepsilon) : y = \frac{1}{2}$.**

γ. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} = \lambda$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 6}{2x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{2x} = -2 = \beta$$

Άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$.**

ΚΕΛΑΦΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

α. Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$\left[f^3(x) + f(x)\right]' = (8x^3 - 12x^2 + 8x - 2)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)\cdot f'(x) + f'(x) = 24x^2 - 24x + 8 \Leftrightarrow$$

$$[3f^2(x) + 1]\cdot f'(x) = 8(3x^2 - 3x + 1) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{8(3x^2 - 3x + 1)}{3f^2(x) + 1} > 0,$$

διότι $3f^2(x) + 1 > 0$ και $3x^2 - 3x + 1 > 0$ αφού $\Delta = -3 < 0$.

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο IR, άρα **η f είναι "1-1"**.

β. Η f είναι γν. αύξουσα στο (0 , 1), άρα η f (x) = 0 έχει μια το πολύ ρίζα στο (0 , 1). **(1)**

- η f είναι συνεχής στο [0 , 1] ως παραγωγίσιμη
- $f(0)\cdot f(1) < 0$

- Για $x = 0$: $f^3(0) + f(0) = -2 \Leftrightarrow$
  $f(0)\cdot\left[f^2(0) + 1\right] = -2 \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{-2}{f^2(0) + 1} < 0$
- Για $x = 1$: $f^3(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow$
  $f(1)\cdot\left[f^2(1) + 1\right] = 2 \Leftrightarrow f(1) = \dfrac{2}{f^2(1) + 1} > 0$

Επομένως από Θ. Bolzano,

η f (x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0 , 1). **(2)**

Από (1) και (2), **η f (x) = 0 έχει μια μόνο ρίζα στο (0 , 1)**.

γ. $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2) \overset{f\text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow} g(x) - 3x = x^2 + 2 \Leftrightarrow$

$g(x) = x^2 + 3x + 2$

Είναι $g'(x) = 2x + 3$ και $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$g'(x) = 2x + 3$	-	0	+
g (x)	↘		↗

Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $\mathbf{x_0 = -\frac{3}{2}}$.

ΚΕΛΑΦΑΣ