ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 91

Β. Σ, **Γ.** Λ, **Δ.** Σ, **Ε.** Σ, **ΣΤ.** Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

α.i. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2+1}+2x-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}+2}{1} = \mathbf{2}$$

ii. $$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)' = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}+2$$

$f'(0) = 2$ και $f(0) = 1$, άρα $\mathbf{f'(0) = 2f(0)}$

β. $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2}\right) = \mathbf{0},$$

διότι $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2} = -\frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $A(1, -4) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha + \beta + 3}{-1} = -4 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 3 = 4 \Leftrightarrow$

$\alpha = 1 - \beta \ (1)$

$f(3) + 3f(1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{9\alpha + 3\beta + 3}{1} + 3(-4) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$9(1 - \beta) + 3\beta + 3 - 12 = 0 \Leftrightarrow 9 - 9\beta + 3\beta - 9 = 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 0}$

Από την (1) για $\beta = 0$, έχουμε $\boldsymbol{\alpha = 1}$

β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ είναι $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{x - 2}\right)' = \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 3)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 3}{(x - 2)^2}$$

$f'(1) = -6$

$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y + 4 = -6(x - 1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y + 4 = -6x + 6 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(\varepsilon) : y = -6x + 2}$

γ. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 + 3}{x - 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \to +\infty} f[(x) - \lambda x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 3 = \beta$$

άρα **η ευθεία $y = x + 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.**

ΘΕΜΑ 4ο

α. $3\mathrm{Re}(z) + 4\mathrm{Im}(z) = 3 \Leftrightarrow$

$3(3 - k) + 4(2k + 1) = 3 \Leftrightarrow$

$9 - 3k + 8k + 4 = 3 \Leftrightarrow$

$5k = -10 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{k = -2}$

β. $|z - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(3 - k) + 4(2k + 1)i - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$|(2 - k) + (2k + 1)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(2 - k)^2 + (2k + 1)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$(2 - k)^2 + (2k + 1)^2 = 5 \Leftrightarrow 4 - 4k + k^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 5 \Leftrightarrow$

$5k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 0$

Για $k = 0$ είναι $z = 3 + i$ και $\boldsymbol{|z| = \sqrt{10}}$

γ. $\begin{cases} x = 3 - k \\ y = 2k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 - x \\ y = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2(3 - x) + 1 \Leftrightarrow y = -2x + 7$

άρα **οι εικόνες του z ανήκουν στην ευθεία (ε) : $y = -2x + 7$**