

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε να αποδείξετε ότι:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)].$$

Μονάδες 15

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα

είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

β. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 2

δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 2

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Μονάδες 5

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R} , με τύπο

$$f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}$$

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f , εάν

$$|z+1| > |z-1|.$$

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R} , με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .

Μονάδες 12

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt = 1$$

έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

Μονάδες 13