ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2006
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

Β. 1. Λ, **2.** Σ, **3.** Σ, **4.** Λ, **5.** Λ, **6.** Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$

$$x = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

β. $|z_1| = |z_2| = |\bar{z}_2| = \sqrt{2^2 + (\pm 3)^2} = \sqrt{13}$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

$$i^{2006} = \left(i^4\right)^{501} \cdot i^2 = 1^{501} \cdot (-1) = -1$$

$$A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13} \cdot |\bar{z}_2| + i^{2006}$$

$$= \left(\sqrt{13}\right)^2 - 2 \cdot 13 + \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} + (-1)$$

$$= 13 - 26 + 13 - 1$$

$$= -1$$

γ. $|z - z_1| = 5 \Leftrightarrow |z - (2 + 3i)| = 5$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2, 3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ 3ο

Ι. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-\frac{3}{4}x + \lambda\right) = \lambda - \frac{3}{4}$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 8x + 4}{4x} = \frac{1 - 8 + 4}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$f(1) = \lambda - \frac{3}{4}$$

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει

$$\lambda - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

ΙΙ. α. Για $\lambda = 0$ είναι $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4}x, & x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$

- Για $x < 1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.
- Για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή.
- Στο $x_0 = 1$: $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-\frac{3}{4}(x - 1)}{x - 1} = -\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{x^2 - 8x + 4}{4x} + \frac{3}{4}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{x^2 - 8x + 4 + 3x}{4x}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{4x(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x - 4)}{4x(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 4}{4x} = -\frac{3}{4}$$

άρα $f'(1) = -\dfrac{3}{4}$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο IR.

β. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2-8x+4}{4x}}{x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-8x+4}{4x^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4} = \lambda$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 8x + 4}{4x} - \frac{1}{4}x \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 8x + 4 - x^2}{4x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-8x}{4x} = -2 = \beta$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = \dfrac{1}{4}x - 2$

ΘΕΜΑ 4ο

I. $f'(x) = (2x^3 - kx^2 + 10)' = 6x^2 - 2kx$

$f'(1) = 6 - 2k$

Πρέπει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

II. α. Για $k = 3$ είναι $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10$ και $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 10$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ την τιμή $f(1) = 9$

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(2x^3 - 3x^2 + 10\right) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$f(0) = 10$

άρα $f(\Delta_1) = (-\infty, 10]$

γ. ***α΄ τρόπος***

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (0, 1)$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+}\left(2x^3 - 3x^2 + 10\right) = 10\\ \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-}\left(2x^3 - 3x^2 + 10\right) = 9\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = (9, 10)$$

$14 < \alpha < 15 \Leftrightarrow 9 < \alpha - 5 < 10$ άρα $\alpha - 5 \in f(\Delta_2)$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

β΄ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \alpha + 5$, $x \in [0, 1]$

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(0) = f(0) - \alpha + 5 = 15 - \alpha > 0$

  $g(1) = f(1) - \alpha + 5 = 14 - \alpha < 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

Είναι $g'(x) = f'(x) < 0$, άρα g είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1)$.

Επομένως η ρίζα αυτή είναι μοναδική.