ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 229

Β. 1. Σ, **2.** Λ, **3.** Λ, **4.** Λ, **5.** Σ*, **6.** Λ**, **7.** Λ, **8.** Σ.

*** Είναι λάθος αν για παράδειγμα** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

** **Είναι σωστή αν για παράδειγμα** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

ΘΕΜΑ 2ο

α. $z_1 + 5z_2 = -1 + i + 5(3 - 4i) = -1 + i + 15 - 20i = \mathbf{14 - 19i}$

β. $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{3 - 4i}{-1 - i} = \dfrac{(3 - 4i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} = \dfrac{-3 + 3i + 4i + 4}{1 + 1} = \mathbf{\dfrac{1 + 7i}{2}}$

γ. $\rho = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\text{συνφ} = \dfrac{\alpha}{\rho} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $\text{ημφ} = \dfrac{\beta}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\mathbf{Arg(z_1) = \dfrac{3\pi}{4}}$

δ. $z_1^8 = (-1 + i)^8 = \left[(-1 + i)^2\right]^4 = (-2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = \mathbf{16}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x - 2)' = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1 , 3], ενώ είναι γνησίως αύξουσα στα (-∞ , 1] και [3 , +∞).

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο την τιμή f (1) = 2, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο την τιμή f (3) = -2.

β. $f(-1) = -18$ και $f'(-1) = 24$

$(\varepsilon): y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x+1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y + 18 = 24(x+1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y + 18 = 24x + 24 \Leftrightarrow$ **$(\varepsilon): y = 24x + 6$**

γ. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$

$f(0) = -2 < 0$ και $f(1) = 2 > 0$

άρα από Θ. Bolzano η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-4x}{x-2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2-4}{1} = 8\\
&\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-x^2+\kappa\right) = \kappa - 4\\
&f(2) = -2^2 + \kappa = \kappa - 4
\end{aligned}\right\} \underset{\text{στο } x_0 = 2}{\overset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow}} \boldsymbol{\kappa = 12}$$

β. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x}{x-2} = \dfrac{-3}{-1} = \mathbf{3}$

γ. Για $x > 2$ είναι $f'(x) = (-x^2+12)' = -2x$, άρα **$f'(4) = -8$**

δ. $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+3} = \dfrac{\frac{x^3-4x}{x-2}}{x+3} = \dfrac{x^3-4x}{x^2+x-6}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4x}{x^2+x-6}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x}{x^3+x^2-6x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4x}{x^2+x-6} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}-4x\cancel{-x^3}-x^2+6x}{x^2+x-6}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+2x}{x^2+x-6} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \beta$$

άρα **η $y = x - 1$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$**.