ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΕΡΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 232

Β.1. Σ, **2.** Σ, **3.** Λ, **4.** Λ,

5. Σ, αν τα όρια είναι πραγματικοί αριθμοί

Λ,π.χ. στην περίπτωση $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

ΘΕΜΑ 2^o

α. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-3x}{x-2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}(x-2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-3}{x-2} = \frac{3}{2}$$

β. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2-3x}{x-2}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\cancel{x^2} - 3x \cancel{- x^2} + 2x}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{x} = -1 = \beta$$

άρα **η ευθεία $y = x - 1$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.**

γ. Για $x \neq 2$: $$f'(x) = \left(\frac{x^2-3x}{x-2}\right)' = \frac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x \cancel{-3x} + 6 - x^2 \cancel{+3x}}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}$$

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 6$ έχει $\Delta < 0$, άρα είναι πάντα θετικό,

άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \neq 2$

Επομένως **η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.**

ΘΕΜΑ 3ο

α. $$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} x^2 = 25 \\ &\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} (10x - 25) = 25 \\ &f(5) = 10\cdot 5 - 25 = 25 \end{aligned}\right\} \textbf{ η f είναι συνεχής στο } \mathbf{x_0 = 5}$$

β. $$\lim_{x\to 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{(x + 5)\cancel{(x - 5)}}{\cancel{x - 5}} = \lim_{x\to 5^-} (x + 5) = 10$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5^+} \frac{10x - 25 - 25}{x - 5} = \lim_{x\to 5^+} \frac{10\cancel{(x - 5)}}{\cancel{x - 5}} = 10$$

άρα **η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x_0 = 5}$ με $\mathbf{f'(5) = 10}$.**

γ. $(\varepsilon): y - f(5) = f'(5)\cdot(x - 5) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - 25 = 10(x - 5) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y - 25 = 10x - 50 \Leftrightarrow$ **$(\varepsilon): y = 10x - 25$**

δ. Για $x < 5: f'(x) = 2x$

Για $x > 5: f'(x) = 10$

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	↘		↗	↗

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, την τιμή $f(0) = 0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $$w = \frac{i(i + z)}{i - z} = \frac{-1 + iz}{i - z} \underset{x,y\in IR}{\overset{z = x + yi}{=}} \frac{-1 + i(x + yi)}{i - (x + yi)} = \frac{-1 + xi - y}{i - x - yi}$$

$$= \frac{(-1 - y + xi)(-x + yi - i)}{(-x - yi + i)(-x + yi - i)} = \frac{x - \cancel{yi} + i + \cancel{xy} - y^2 i + \cancel{yi} - x^2 i - \cancel{xy} + x}{(-x)^2 + (y - 1)^2}$$

$$= \frac{2x + i(1 - y^2 - x^2)}{x^2 + (y - 1)^2} = \mathbf{\frac{2x}{x^2 + (y - 1)^2} + \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y - 1)^2} i}$$

ελάφας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

β. $w \in IR \Leftrightarrow Im(w) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 1$, **άρα η εικόνα του z ανήκει στον μοναδαίο κύκλο.**

γ. $z \in IR \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow w = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1-x^2}{x^2+1}i$

$$|w| = \left|\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^2+1}i\right| = \sqrt{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{(1-x^2)^2}{(x^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{(1-x^2)^2}{(x^2+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4x^2 + 1 - 2x^2 + x^4}{(x^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}} = 1,$$

άρα η εικόνα του w ανήκει στον μοναδαίο κύκλο.