ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 89

Β. Α - 3, Β - 4, Γ - 1, Δ - 2.

Γ. Σ, **Δ.** Λ, **Ε.** Λ, **ΣΤ.** Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α.
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(4x^2 + 3\right) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(6x + \kappa\right) = 6 + \kappa \\ f(1) = 6 + \kappa \end{array}\right\} \underset{\text{στο } x_0 = 1}{\overset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow}} 6 + \kappa = 7 \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa = 1}$$

β. • $x < 1 : f'(x) = (4x^2 + 3)' = 8x$

• $x > 1 : f'(x) = (6x + 1)' = 6$

$f(-1) = 7$ και $f'(-1) = -8$

$(\varepsilon) : y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - 7 = -8(x + 1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y - 7 = -8x - 8 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(\varepsilon) : y = -8x - 1}$

γ. $f'(-5) = 8(-5) = -40$

$f'(5) = 6$

$\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0 \Leftrightarrow \mu \cdot (-40) + 6 + 34 = 0 \Leftrightarrow$

$-40\mu = -40 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\mu = 1}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta)' = 6x^2 - 6x + 6\alpha$

Η f παρουσιάζει τ. ακρότατο στο $x_0 = -2$, άρα από Θ. Fermat

$f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 6(-2)^2 - 6(-2) + 6\alpha = 0 \Leftrightarrow 36 + 6\alpha = 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = -6}$

$f(-2) = 98 \Leftrightarrow 2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 6(-6)(-2) + \beta = 98 \Leftrightarrow$

$-16 - 12 + 72 + \beta = 98 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta = 54}$

β. $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 54$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [-2 , 3], ενώ είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty , -2]$ και $[3 , +\infty)$.

γ. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x = -2, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = 3.

δ. Η f είναι συνεχής στο [-1 , 2]

$f(-1) = 85 > 0$ και $f(2) = -14 < 0$

άρα από Θ. Bolzano η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1 , 2) και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-1 , 2) η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 4ο

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 i = \alpha + (1-\alpha)i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \alpha & \mathbf{(1)} \\ y^2 = 1-\alpha & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

α. $\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

β. $\alpha = 0 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \pm i \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow \mathbf{z^2 + 1 = 0}$

γ. $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{cases} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} \begin{cases} \alpha \geq 0 \\ 1 - \alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \alpha \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{0 \leq \alpha \leq 1}$

δ. $(1), (2) \overset{(+)}{\Rightarrow} x^2 + y^2 = 1$,

άρα **οι εικόνες του z ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο**