ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 97
Β. 1. Σ, **2.** Λ, **3.** Λ, **4.** Σ, **5.** Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2 + 3 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$
Για $\lambda = 1$ είναι $z = -1 + i$

β. $|w| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\kappa^2 + 4^2} = 5 \Leftrightarrow \kappa^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow \kappa^2 = 9 \overset{\kappa>0}{\Rightarrow} \kappa = 3$

γ. $z + \mu\bar{z} = 3i - w \Leftrightarrow -1 + i + \mu(-1 - i) = 3i - (3 + 4i) \Leftrightarrow$
$-1 + i - \mu - \mu i = 3i - 3 - 4i \Leftrightarrow (-1 - \mu) + (1 - \mu)i = -3 - i \Leftrightarrow$
$\begin{cases} -1 - \mu = -3 \\ 1 - \mu = -1 \end{cases} \Rightarrow \mu = 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $A(1, 1) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + \kappa + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1$

β. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$
$f'(x) = (x^3 - x^2 + 3x - 2)' = 3x^2 - 2x + 3$
Το τριώνυμο $3x^2 - 2x + 3$ έχει $\Delta < 0$, άρα είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$
$f(0) = -2 < 0$ και $f(1) = 1 > 0$
άρα από Θ. Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(2-\alpha)x^2-\kappa x+2}{x-3}}{x}=1 \Leftrightarrow$

  $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-\alpha)x^2-\kappa x+2}{x^2-3x}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(2-\alpha)\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1 \Leftrightarrow$

  $2-\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=1$

- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0 \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\kappa x+2}{x-3}-x\right)=0 \Leftrightarrow$

  $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\kappa x+2-x^2+3x}{x-3}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(3-\kappa)x+2}{x-3}=0 \Leftrightarrow$

  $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-\kappa)x}{x}=0 \Leftrightarrow 3-\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=3$

β. $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-3}$

- f συνεχής στο $[1,2]$ ως ρητή
- f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως ρητή
- $f(1)=f(2)=0$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

γ. Για $x\neq3$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-3x+2}{x-3}\right)'=\frac{(2x-3)(x-3)-(x^2-3x+2)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$$

$f(1)=0$ και $f'(1)=\frac{1}{2}$

$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$