ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2007

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 224
2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

Β. **1.** ΛΑΘΟΣ
2. ΣΩΣΤΟ
3. ΣΩΣΤΟ
4. ΣΩΣΤΟ
5. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\begin{cases} x = \lambda - 2 \\ y = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x + 2 \\ y = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow y = 2(x+2) \Leftrightarrow \mathbf{y = 2x + 4}$

β. $z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$

Για $\lambda = 3$: $z = 1 + 6i$ και

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+6i} = \frac{1-6i}{(1+6i)(1-6i)} = \frac{1-6i}{37} = \frac{1}{37} - \frac{6}{37}i$$

Άρα $\mathbf{Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{37}}$

γ. $|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-2)^2 + (2\lambda)^2} = 2 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 4 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 4\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(5\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{4}{5}$

- Για $\lambda = 0$ είναι $\mathrm{Im}(z) = 0$ άρα απορρίπτεται.

Άρα $\mathbf{\lambda = \frac{4}{5}}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = \left(\dfrac{4}{x}\right)' = -\dfrac{4}{x^2}$

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{4}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = \mathbf{0}$

ii. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x \cdot f(x)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x \cdot \dfrac{4}{x}}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4}{(x-2)^2} = \mathbf{+}\infty$

β. Έστω $M(x, f(x))$ ένα σημείο της C_f.

$$d(x) = (OM) = \sqrt{x^2 + f^2(x)} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}, \ x > 0.$$

$$d'(x) = \left(\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}\right)' = \frac{2x - \dfrac{32}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{16}{x^2}}} = \frac{x^4 - 16}{x^3\sqrt{x^2 + \dfrac{16}{x^2}}}, \ x > 0$$

x	0	2	$+\infty$
$d'(x)$	-	0	+
$d(x)$	↘	ολ. ελ.	↗

Η απόσταση γίνεται ελάχιστη για $x = 2$ δηλαδή στο σημείο **M (2 , 2)**

γ. Πρέπει $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = -2 \Leftrightarrow$

$$-\frac{4}{x^2} = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{2}$$

Για $x = \sqrt{2}$ είναι $f(\sqrt{2}) = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Άρα **η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -2x + 6$.**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{x + 2\eta\mu x}{x} = 1 + 2\dfrac{\eta\mu x}{x}$

$$f(0) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(1 + 2\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 + 2\lim_{x \to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1 + 2 \cdot 1 = \mathbf{3}$$

β. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in \left(0\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει :

$$f(x) < 3 \;\Leftrightarrow\; 1 + 2\frac{\eta\mu x}{x} < 3 \;\Leftrightarrow\; 2\frac{\eta\mu x}{x} < 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{\eta\mu x}{x} < 1 \;\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$\eta\mu x < x$ που ισχύει (σχολικό βιβλίο σελίδα 170)

Άρα $\mathbf{f(x) < 3,}$ **για κάθε** $\mathbf{x \in \left(0\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

γ. Θεωρούμε συνάρτηση g,

με $g(x) = f(x) - 2 = 1 + 2\dfrac{\eta\mu x}{x} - 2 = 2\dfrac{\eta\mu x}{x} - 1,\ x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right]$

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right]$ ως πράξεις συνεχών

- $$\left.\begin{array}{l} g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - 1 = 2\dfrac{2}{\pi} - 1 = \dfrac{4 - \pi}{\pi} > 0 \\[2ex] g(\pi) = 2\dfrac{\eta\mu\pi}{\pi} - 1 = 0 - 1 = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot g(\pi) < 0$$

Από Θ. Bolzano

υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$ στο $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right)$

επομένως

η εξίσωση $\mathbf{f(x) = 2}$ **έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο** $\mathbf{\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)}$.