ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2008
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 91

2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188

Β. **1.** Λ , **2.** Λ, **3.** Σ, **4.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Ο $z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i$, είναι η άλλη ρίζα της εξίσωσης

$$\text{Τύποι Vieta} \begin{cases} S = z_1 + z_2 = -\dfrac{\lambda}{3} \\ P = z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\mu}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\dfrac{\lambda}{3} \\ 2 = \dfrac{\mu}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\lambda = -6} \\ \boldsymbol{\mu = 6} \end{cases}$$

Β. α. $z_1^{\,2} + z_2^{\,2} = (1+i)^2 + (1-i)^2 = 1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 = 0$

β. $z_1^{\,2008} + z_2^{\,2008} = \left(z_1^{\,2}\right)^{1004} + \left(z_2^{\,2}\right)^{1004} = (2i)^{1004} + (-2i)^{1004}$

$$= 2^{1004} \cdot i^{1004} + 2^{1004} \cdot i^{1004} = 2^{1004} + 2^{1004} = 2 \cdot 2^{1004} = 2^{1005}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. α.
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-x) = 0 \\ &\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1)^2 = 0 \\ &f(1) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ άρα } \textbf{η f είναι συνεχής στο } \boldsymbol{x_0 = 1}$$

β. $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1 - x - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2 - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$$

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$,

άρα **η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{x_0 = 1}$**

Β. Για $x > 1$ είναι $f'(x) = [(x-1)^2]' = 2(x-1)$

$f'(2) = 2 \cdot (2-1) = 2$

$(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = 2(x - 2) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 2x - 3}$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Πρέπει $x \neq 0$, άρα $\mathbf{D_f = IR^*}$

Β. Είναι $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + k}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{2x}{x} + \dfrac{k}{x} = x + 2 + \dfrac{k}{x}$

$$f'(x) = \left(x + 2 + \frac{k}{x}\right)' = 1 - \frac{k}{x^2}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον $x'x$,

άρα $f'(1) = 0 \iff 1 - k = 0 \iff \mathbf{k = 1}$.

Γ. Για $\kappa = 1$ είναι $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}$ και $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

α. • $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \left[(x^2 + 2x + 1)\dfrac{1}{x}\right] = -\infty$,

διότι $\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + 1) = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Άρα έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y'y$)**.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{x^2 + 2x + 1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 1 - x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x} = 2 = \beta$.

Άρα έχει **πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $(\varepsilon): y = x + 2$.**

• Όμοια έχει **πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $(\varepsilon): y = x + 2$.**

β. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Για $x > 1$ είναι $x^2 > 1$, άρα $f'(x) > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$,

επομένως **η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$**.