

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1°

- A.1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 279
2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 229

B. 1. Λ, 2. Σ, 3. Λ, 4. Σ

ΘΕΜΑ 2°

α. $z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1 = 1^2 - 2i + i^2 + 3(i^4)^{502}i + 1$
 $= 1 - 2i - 1 + 3i + 1 = 1 + i$

β. $\bar{z}_1 - z_2 = \overline{2 + 3i} - (1 + i) = 2 - 3i - 1 - i = 1 - 4i$

$|\bar{z}_1 - z_2| = |1 - 4i| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

γ. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 + i} = \frac{(2 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 2i + 3i - 3i^2}{1 - i^2}$
 $= \frac{2 - 2i + 3i + 3}{1 + 1} = \frac{5 + i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

ΘΕΜΑ 3°

α. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 + \beta) = \alpha + \beta$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 3) = 5$

$f(1) = \alpha \cdot 1^2 + \beta = \alpha + \beta$

Για να είναι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 + \beta - (\alpha + \beta)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 - \alpha}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \alpha(x + 1) = 2\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x + 3) - (\alpha + \beta)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3 - 5}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\alpha + \beta = 5 \stackrel{\alpha=1}{\Rightarrow} 1 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 - 1 \Leftrightarrow \beta = 4$$

γ. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ είναι $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4}{x}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \frac{2x + 3}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

- ΣΤΟ $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 4}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = 0 = \beta$$

Η $(\varepsilon_1): y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

- ΣΤΟ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Η $(\varepsilon_2): y = 2$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ 4^ο

I. $f'(x) = (x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1)' = 3x^2 + 2\lambda x - 3, x \in \mathbb{R}$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Από Θ. Fermat έχουμε :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

II.α. Για $\lambda = 0$ είναι :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ και } f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
f'(x)		+	0	-	0	+
f(x)						

Τ. μέγιστο

Τ. ελάχιστο

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$,
ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -1$ την τιμή

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ την τιμή

$$f(1) = 1^3 - 3 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

β. Πρέπει $f'(x) = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

• $x_0 = -2$

$$y_0 = f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1$$

$$(\varepsilon_1) : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow (\varepsilon_1) : y + 1 = 9(x + 2) \Leftrightarrow (\varepsilon_1) : y = 9x + 17$$

• $x_0 = 2$

$$y_0 = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$$

$$(\varepsilon_2) : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow (\varepsilon_2) : y - 3 = 9(x - 2) \Leftrightarrow (\varepsilon_2) : y = 9x - 15$$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) - \sqrt{x}, x \in [0, 1]$

• η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως διαφορά συνεχών

• $g(0) = f(0) = 1 > 0$

• $g(1) = f(1) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{x} = 0$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.