ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ
Γ Λυκείου

Ζήτημα ①

A1 $\longrightarrow$ σελ 31 A2 $\longrightarrow$ σελ 96

A3 $\longrightarrow$ α) $\to$ Λ β) $\to$ Σ γ) $\to$ Λ δ) $\to$ Σ ε) $\to$ Σ

Ζήτημα ②

B1 Η $f(x) = x^2 + αx + β$, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, έχει παράγωγο $f'(x) = 2x + α$.

Στο σημείο που η f τέμνει τον y΄y, δηλ. στο $x = 0$, η εφαπτόμενή της σχηματίζει με τον x΄x γωνία 45°, άρα $f'(0) = εφ45° \Leftrightarrow \boxed{α = 1}$

B2 Από υπόθεση $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x) + βx}{x+1} = 6 \overset{α=1}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x + β + βx}{x+1} = 6 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x(x+1) + β(x+1)}{x+1} = 6 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+β)}{x+1} = 6 \Leftrightarrow -1 + β = 6 \Leftrightarrow \boxed{β = 7}$$

B3 Από υπόθεση δίνεται $g(x) = f(x) - x^3 \underset{β=7}{\overset{α=1}{\Leftrightarrow}}$

$g(x) = -x^3 + x^2 + x + 7$, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$g'(x) = -3x^2 + 2x + 1$.

Από $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0$ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↘	min	↗	max	↘	

Το πρόσημο της $g'(x)$ και η μονοτονία της $g(x)$ φαίνονται στον παραπάνω πίνακα.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Γ1 Από το πολύγωνο των $F_i\%$ διαπιστώνω ότι το 50% των παρατηρήσεων αντιστοιχεί στην τιμή 25 άρα $\boxed{\textbf{διάμεσος } \delta = 25}$

Γ2 Ξέρουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει το σύνολο των παρατηρήσεων σε 2 ίσα μέρη. Έτσι από τον πίνακα που δίνεται έχουμε:

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_3 + \nu_4 \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow 4\alpha - 2 = 3\alpha + 6$$

$$\boxed{\alpha = 8}$$

Γ3 Με $\alpha = 8$ ο πίνακας της υπόθεσης φαίνεται δίπλα οπότε:

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$
[5–15)	10	12	20	12	20	2	2352
[15–25)	20	18	30	30	50	6	288
[25–35)	30	24	40	54	90	12	864
[35–45)	40	6	10	60	100	4	1536
ΣΥΝ.		60	100			24	5040

Μέση Τιμή $\bar{x} = \sum_{\nu=1}^{60} x_i \cdot f_i = 24$

Διακύμανση $s^2 = \dfrac{\sum_{\nu=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{\nu} =$

$= \dfrac{5040}{60} = 84$

Τυπική απόκλιση $s = \sqrt{84} \simeq 9,17$

Γ4 Οι μαθητές που χρειάστηκαν $t \geq 37$, ανήκουν στα $\frac{4}{5}$ της 4ης κλάσης οπότε (οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα) το ποσοστό αυτών είναι $\boxed{\frac{4}{5} f_4\% = 8\%}$

ΖΗΤΗΜΑ ④

Δ1 Είναι $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ με Π.Ο το $\mathbb{R}$ και συνεχής σε αυτό.

Είναι $f'(x)=\dfrac{-2}{\left(x^2+1\right)^2}\left(x^2+1\right)'=\dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Από $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Η μονοτονία της f(x) φαίνεται στον πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Δ2 Ξέροντας ότι η f(x) $\downarrow$ στο $[0,3]$, με $0<\alpha<\beta<\gamma<3$ είναι

$f(0)=2>f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)>f(3)=\dfrac{2}{10}$ οπότε το εύρος των τιμών αυτών είναι:

$R=x_{max}-x_{min}=2-\dfrac{2}{10}=\dfrac{18}{10} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{R=1{,}8}}$

Δ3 Η εφαπτόμενη της f στο $\Sigma\left(1,f(1)\right)$ δηλ. στο $\Sigma(1,1)$ έχει συντελεστή

διεύθυνσης $f'(1)=\dfrac{-4\cdot 1}{\left(1+1\right)^2}=-1$ άρα είναι ευθεία της μορφής ε: $y=-x+\beta$, που

περνά από το $\Sigma(1,1)$ άρα για $x=y=1$ έχουμε: $1=-1+\beta \Leftrightarrow \beta=2$

Άρα η εφαπτόμενη της f στο $\Sigma\left(1,f(1)\right)$ είναι η $\boxed{\mathbf{\varepsilon\colon y=-x+2}}$

Έχουμε 10 σημεία $\left(x_i,y_i\right)$ της ε με τις τετμημένες x_i να έχουν $\left\langle\begin{array}{l}\text{Μέση Τιμή } \bar{x}=10\\ \text{Τ. Απόκλιση } s_x=2\end{array}\right.$.

Τότε οι παρατηρήσεις (τεταγμένες) $y_i=-x_i+2$ έχουν $\left\langle\begin{array}{l}\text{Μέση Τιμή } \bar{y}=-\bar{x}+2=-8\\ \text{Τυπ. Απόκλιση } s_y=\left|-1\right|s_x=2\end{array}\right.$

Δ4 Δίνονται τα σημεία Ο(0,0), $M\left(x,f(x)\right)$, $K(x,0)$ και $\Lambda\left(0,f(x)\right)$.

Το ορθογώνιο ΟΚΜΛ έχει $E=(OK)(O\Lambda)=|x|\cdot|f(x)|=xf(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$,

αφού $x>0$ (από υπόθεση) και $f(x)>0$.

Έστω $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ με $x>0$ της οποίας θέλω το max.

Είναι $g'(x) = \dfrac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Από $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow 2-2x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$. Το πρόσημο της $g'(x)$ φαίνεται δίπλα.

x	0		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Έτσι η $g(x)$ έχει μέγιστο στο $x = 1$, όπου εκεί είναι $f(1) = 1$.

Έτσι έχουμε τα σημεία $O(0,0)$, $M\left(1,1\right)$, $K\left(1,0\right)$ και $\Lambda\left(0,1\right)$ που προφανώς

σχηματίζουν **τετράγωνο πλευράς α = 1**

Καλή Επιτυχία