

# ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ

## Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΖΗΤΗΜΑ ①

**A1** → σελ 31    **A2** → σελ 96

**A3** → a)  $\rightarrow \wedge$    b)  $\rightarrow \Sigma$    c)  $\rightarrow \Lambda$    d)  $\rightarrow \Sigma$    e)  $\rightarrow \Sigma$

### ΖΗΤΗΜΑ ②

**B1** Η  $f(x) = x^2 + ax + b$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , έχει παράγωγο  $f'(x) = 2x + a$ .

Στο σημείο που η  $f$  τέμνει τον γραμμή  $y = x$ , δηλ. στο  $x = 0$ , η εφαπτόμενή της σχηματίζει

με τον γραμμή  $y = x$  γωνία  $45^\circ$ , αρα  $f'(0) = \tan 45^\circ \Leftrightarrow a = 1$

**B2** Από υπόθεση  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + bx}{x + 1} = 6 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + b + bx}{x + 1} = 6 \Leftrightarrow$

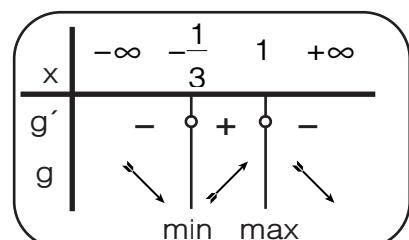
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x + 1) + b(x + 1)}{x + 1} = 6 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + b)}{x + 1} = 6 \Leftrightarrow -1 + b = 6 \Leftrightarrow b = 7$

**B3** Από υπόθεση δίνεται  $g(x) = f(x) - x^3 \Leftrightarrow$

$g(x) = -x^3 + x^2 + x + 7$ , ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , με παράγωγο

$g'(x) = -3x^2 + 2x + 1$ .

Από  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = 1 \end{cases}$



Το πρόσημο της  $g'(x)$  και η μονοτονία της  $g(x)$  φαίνονται στον παραπάνω πίνακα.

## ΖΗΤΗΜΑ ③

**Γ1**

Από το πολύγωνο των  $F_i\%$  διαπιστώνω ότι το 50% των παρατηρήσεων

αντιστοιχεί στην τιμή 25 ára

**διάμεσος  $\delta = 25$**

**Γ2**

Ξέρουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει το σύνολο των παρατηρήσεων σε 2 ίσα μέρη. Έτοι από τον πίνακα που δίνεται έχουμε:

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \Leftrightarrow a + 4 + 3a - 6 = 2a + 8 + a - 2 \Leftrightarrow 4a - 2 = 3a + 6$$

**$a = 8$**

**Γ3**

Με  $a = 8$  ο πίνακας της

υπόθεσης φαίνεται δίπλα οπότε:

$$\text{Μέση Τιμή } \bar{x} = \sum_{v=1}^{60} x_i \cdot f_i = 24$$

$$\text{Διακύμανση } s^2 = \frac{\sum_{v=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \\ = \frac{5040}{60} = 84$$

$$\text{Τυπική απόκλιση } s = \sqrt{84} \approx 9,17$$

ΚΛΑΣΕΙΣ	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
[5–15)	10	12	20	12	20	2	2352
[15–25)	20	18	30	30	50	6	288
[25–35)	30	24	40	54	90	12	864
[35–45)	40	6	10	60	100	4	1536
SΥΝ.		60	100			24	5040

**Γ4**

Οι μαθητές που χρειάστηκαν  $t \geq 37$ , ανήκουν στα  $\frac{4}{5}$  της 4ης κλάσης οπότε

(οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα) το ποσοστό αυτών είναι

**$\frac{4}{5} f_4 \% = 8\%$**

## ΖΗΤΗΜΑ ④

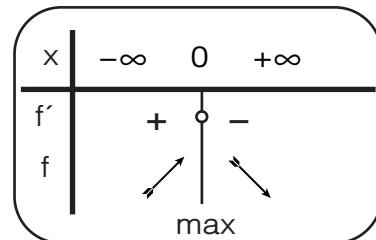
**Δ1**

Είναι  $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$  με Π.Ο το  $\mathbb{R}$  και συνεχής σε αυτό.

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{-2}{(x^2 + 1)^2} (x^2 + 1)' = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$\text{Από } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Η μονοτονία της  $f(x)$  φαίνεται στον πίνακα.



**Δ2**

Ξέροντας ότι η  $f(x) \downarrow$  στο  $[0, 3]$ , με  $0 < a < b < \gamma < 3$  είναι

$$f(0) = 2 > f(a) > f(b) > f(\gamma) > f(3) = \frac{2}{10} \text{ οπότε το εύρος των τιμών αυτών είναι:}$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 2 - \frac{2}{10} = \frac{18}{10} \Leftrightarrow \boxed{R = 1,8}$$

**Δ3**

Η εφαπτόμενη της  $f$  στο  $\Sigma(1, f(1))$  δηλ. στο  $\Sigma(1, 1)$  έχει συντελεστή

$$\text{διεύθυνσης } f'(1) = \frac{-4 \cdot 1}{(1 + 1)^2} = -1 \text{ άρα είναι ευθεία της μορφής } \varepsilon: y = -x + b, \text{ που}$$

περνά από το  $\Sigma(1, 1)$  άρα για  $x = y = 1$  έχουμε:  $1 = -1 + b \Leftrightarrow b = 2$

Άρα η εφαπτόμενη της  $f$  στο  $\Sigma(1, f(1))$  είναι η  $\varepsilon: y = -x + 2$

Έχουμε 10 σημεία  $(x_i, y_i)$  της  $\varepsilon$  με τις τετμημένες  $x_i$  να έχουν  $\text{Μέση Τιμή } \bar{x} = 10$   $T. \text{ Απόκλιση } s_x = 2$ .

Τότε οι παρατηρήσεις (τεταγμένες)  $y_i = -x_i + 2$  έχουν  $\text{Μέση Τιμή } \bar{y} = -\bar{x} + 2 = -8$   $T. \text{ Απόκλιση } s_y = |-1| s_x = 2$

**Δ4**

Δίνονται τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $M(x, f(x))$ ,  $K(x, 0)$  και  $L(0, f(x))$ .

$$\text{Το ορθογώνιο } OKML \text{ έχει } E = (OK)(OL) = |x| \cdot |f(x)| = xf(x) = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

αφού  $x > 0$  (από υπόθεση) και  $f(x) > 0$ .

Έστω  $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  με  $x > 0$  της οποίας θέλω το max.

$$\text{Είναι } g'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

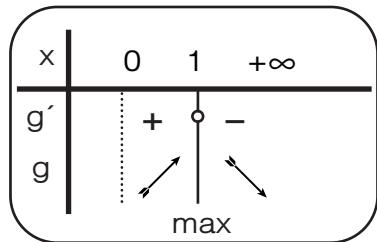
$$\text{Από } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 1. \text{ Το πρόσημο της } g'(x) \text{ φαίνεται δίπλα.}$$

Έτσι η  $g(x)$  έχει μέγιστο στο  $x = 1$ , όπου εκεί είναι  $f(1) = 1$ .

Έτσι έχουμε τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $M(1,1)$ ,  $K(1,0)$  και  $L(0,1)$  που προφανώς

σχηματίζουν **τετράγωνο πλευράς α = 1**



## ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ