ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
Γ Λυκείου

Ζήτημα 1

A1 ⟶ σελ 253   A2 ⟶ σελ 191   A3 ⟶ σελ 258

A4 ⟶ α) → Σ   β) → Σ   γ) → Λ   δ) → Λ   ε) → Σ

Ζήτημα 2

B1 Από τη σχέση $|z-3|^2+|z+3|^2=36$ με $z=x+yi$ έχουμε:

$$|(x-3)+yi|^2+|(x+3)+yi|^2=36 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2=36 \Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+9+y^2+x^2+6x+9+y^2=36 \overset{:2}{\Leftrightarrow} \mathbf{x^2+y^2=9},$$

άρα οι εικόνες των z ανήκουν σε κύκλο $\left\langle \begin{matrix} O(0,0) \\ \rho = 3 \end{matrix} \right.$ δηλ. $\boxed{|z|=3 \ ①}$

B2 Δίνεται $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ και θέλουμε το $|z_1+z_2|$ όπου z_1, z_2 μιγαδικοί

για τους οποίους ισχύουν από ① $|z_1|=|z_2|=3$, δηλ. $\mathbf{z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=9}$.

Από $|z_1-z_2|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=18 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=18 \Leftrightarrow$

$$z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=18 \Leftrightarrow 9-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+9=18 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0 \ ②.$$

Είναι $|z_1+z_2|^2=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2} \overset{②}{=} 9+0+9$, άρα $\boxed{|z_1+z_2|=3\sqrt{2}}$

B3 Δίνεται $|2w-1|=|w-2|$ και με $w=x+yi$ έχουμε:

$$|2x+2yi-1|=|x+yi-2| \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+4y^2}=\sqrt{(x-)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$4x^2-4x+1+4y^2=x^2-4x+4+y^2 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2=3 \overset{:3}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=1,$$

άρα οι εικόνες των w ανήκουν σε **κύκλο** $\left\langle \begin{matrix} \mathbf{O(0,0)} \\ \mathbf{\rho = 1} \end{matrix} \right.$

Ζήτημα ③

Δίνεται η $f(x) = \frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta$ με Π.Ο το $A = (0,+\infty)$.

Γ1 Για $x > 0$ είναι $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 2\alpha x < 0$ αφού από υπόθεση $\left\langle \begin{matrix} \alpha < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right.$.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) \downarrow$ στο $(0,+\infty)$.

Γ2 Τότε η συνάρτηση $f(x)$ θα έχει Σ. Τιμών το $f(A) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \,,\, \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \right) = \mathbb{R}$

αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \overset{\alpha<0}{=} -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty$.

Αφού η τιμή 0 ανήκει στο Σ. Τιμών της $f(x)$ σημαίνει ότι η $f(x)$ έχει ρίζα στο $(0,+\infty)$, μοναδική αφού η συνάρτηση $f(x) \downarrow$ στο $(0,+\infty)$.

Γ3 Βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ άρα η $\boxed{\varepsilon\colon x = 0}$ $(y'y)$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επίσης βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \overset{\alpha<0}{=} -\infty$ και όμοια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \overset{\alpha>0}{=} +\infty$, οπότε η $f(x)$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Αν όμως $\alpha = 0$ τότε:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \beta \right) = \beta$, άρα με $\alpha = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη η $\boxed{\varepsilon\colon y = \beta}$

Γ4 Από υπόθεση η f εμφανίζει ακρότατο στο σημείο $(1,7)$ άρα ισχύουν:

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow -2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$ και $f(1) = 7 \Leftrightarrow 2 + \alpha + \beta = 7 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 4}$

Έτσι είναι $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$ και

από $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Από τον διπλανό πίνακα βλέπουμε ότι η f εμφανίζει **ελάχιστο** στο σημείο $(1,7)$.

x	0		1		+∞
f΄		−	0	+	
f		↘	min	↗	

ΖΗΤΗΜΑ ④

Δίνονται $f''(x) > -2$, $f(1) = f'(0)$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) + ημx}{x^2 - x} = 2$

Δ1 Έστω $h(x) = \dfrac{f(x) + ημx}{x^2 - x}$ με $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 2$, άρα $f(x) + ημx = h(x)(x^2 - x)$

$\Leftrightarrow f(x) = h(x)(x^2 - x) - ημx$ ① με $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(h(x)(x^2 - x) - ημx\right) \overset{f \text{ συνεχής}}{\Leftrightarrow}$ $\mathbf{f(0) = 0}$.

Έτσι η $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{①}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x)(x^2 - x) - ημx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(h(x)(x - 1) - \dfrac{ημx}{x}\right) =$

$= 2(0 - 1) - 1 \Leftrightarrow$ $\mathbf{f'(0) = -3}$ άρα και $\mathbf{f(1) = -3}$.

Δ2 Από υπόθεση η $g(x) = f(x) + α(x + 1)^2$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$ οπότε θα ισχύει $g(0) = g(1) \Leftrightarrow$

$f(0) + α = f(1) + 4α \underset{f(1) = -3}{\overset{f(0) = 0}{\Leftrightarrow}} α = -3 + 4α \Leftrightarrow 3α = 3 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{α = 1}}$

Δ3 Με $α = 1$ είναι $g(x) = f(x) + (x + 1)^2$ με $g'(x) = f'(x) + 2(x + 1)$

και αφού η f 2 φορές παραγωγίσιμη $g''(x) = f''(x) + 2 > 0$ (από υπόθεση).

Από Θ. Rolle στο $[0,1]$ για τη συνεχή και παραγωγίσιμη $g(x)$ (σαν άθροισμα τέτοιων συναρτήσεων) θα υπάρχει 1 τουλάχιστον $ξ \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$g'(ξ) = 0 \Leftrightarrow f'(ξ) + 2(ξ + 1) = 0 \Leftrightarrow f'(ξ) = -2(ξ + 1)$.

Αυτή μάλιστα η ρίζα της $g'(x)$ θα είναι μοναδική αφού $g'(x) \uparrow$ καθότι η $g''(x) > 0$.

Δ4 Ξέρουμε ότι $g'(ξ) = 0$ και $g'(x) \uparrow$ οπότε:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{για } x < ξ \text{ είναι } g'(x) < g'(ξ) = 0, \text{ άρα η } g(x) \downarrow \text{ στο } (-\infty, ξ] \\ \text{για } x > ξ \text{ είναι } g'(x) > g'(ξ) = 0, \text{ άρα η } g(x) \uparrow \text{ στο } [ξ, +\infty) \end{array} \right.$$

οπότε η $g(x)$ εμφανίζει **ελάχιστο** στο σημείο ξ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ