ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

α) Θεωρία από το σχολικό βιβλίο σελ. 304

β) Θεωρία από το σχολικό βιβλίο σελ. 150

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

στ) Λ

ζ) Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α) $x \in R$

Για $x \prec 0$ f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $0 \prec x \prec 1$ f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x \succ 1$ f συνεχής ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών

Για $x = 1$ ισχύει $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ (f συνεχής στο 1)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + \beta) = a + \beta \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (1 + x \ln x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \alpha + \beta = 1$$

f συνεχής στο 0 άρα ισχύει $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2\right) = 0 \\[2ex]
\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(ax+\beta) = \beta \\[2ex]
f(0) = 0
\end{array}\right\} \quad \beta = 0$$

$$a + \beta = 1 \overset{\beta=0}{\Longleftrightarrow} \alpha = 1$$

β) **i)** Επειδή $x \to +\infty$ $\qquad f(x) = 1 + x\ln x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\ln x}{x^2} \ \underset{\text{l'hospital}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x\ln x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{2x} \ \underset{\text{l'hospital}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+1)'}{(\ 2x\ )'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$$

ii) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ x & 0 \prec x \prec 1 \\ 1 + x\ln x & x \ge 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} = 1 \ \underset{\text{l'hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{1}+x\ln x-\cancel{1}}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{(x\ln x)'}{(\ x-1\ )'} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{1} = \ln 1 + 1 = 1$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Θα δείξω ότι $w=\overline{w} \Leftrightarrow w \in R$

Θέτω $w=x+yi^{(1)}, x, y \in R, w=\overline{w} \Leftrightarrow \cancel{x}+yi=\cancel{x}-yi \Leftrightarrow 2yi=0 \Leftrightarrow y=0 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} w \in R$

$$w \in R \Leftrightarrow w=\overline{w} \Leftrightarrow \frac{z}{z^2+1}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}^2+1} \Leftrightarrow \overline{z}^2 \cdot z+z \Leftrightarrow \overline{z} \cdot z^2+\overline{z} \Leftrightarrow \overline{z}^2 \cdot z+z-\overline{z} \cdot z^2-\overline{z}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}(\overline{z}-z)-(\overline{z}-z)=0 \Leftrightarrow (\overline{z}-z)(z \cdot \overline{z}-1)=0=\overline{z}-z=0 \Leftrightarrow \overline{z}=z \Leftrightarrow z \in R$$

ή $\overline{z}z-1=0 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

β) $\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3z=\sqrt{3}(z^2+1) \Leftrightarrow \sqrt{3}z^2-3z+\sqrt{3}=0$

$\Delta=3^2-4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}=9-12=-3 \prec 0$

$$z=\frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(3+i\sqrt{3})}{2 \cdot 3}=\frac{3\sqrt{3}+i \cdot 3}{2 \cdot 3}=\frac{\cancel{3}(\sqrt{3}+i)}{2 \cdot \cancel{3}}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\frac{3-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(3-i\sqrt{3})}{2 \cdot 3}=\frac{3\sqrt{3}-i \cdot 3}{2 \cdot 3}=\frac{\cancel{3}(\sqrt{3}-i)}{2 \cdot \cancel{3}}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

γ) Από τους τύπους της Vieta έχουμε $z_1 \cdot z_2=\dfrac{\gamma}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$ και

$$z_1+z_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-3}{\sqrt{3}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}=\sqrt{3}$$

$$k=\frac{(z_1 \cdot z_2)^3-i}{4+(z_1+z_2)^2}=\frac{1^3-i}{4+\sqrt{3^2}}=\frac{1-i}{7}=\frac{1}{7}-\frac{i}{7}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) $$f(x)=x^2-1+\frac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt^{(1)},\ x\in(0,+\infty)$$

Για $x=1$ έχουμε

$$f(1)=\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{1+1}\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

β)

$$f'(x)=(x^2-1)'+\left(\frac{1}{x+1}\right)'\int_1^x f(t)dt+\left(\int_1^x f(t)dt\right)'\frac{1}{x+1}=$$

$$=2x-\frac{1}{(x+1)^2}(x+1)'\int_1^x f(t)dt+f(x)\left(\frac{1}{x+1}\right)\underset{=}{(1)}2x-\frac{1}{(x+1)^2}\int_1^x f(t)dt+$$

$$+\left(x^2-1+\frac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt\right)\frac{1}{x+1}=2x-\cancel{\frac{1}{(x+1)^2}\int_1^x f(t)dt}+\frac{x^2-1}{x+1}+\cancel{\frac{1}{(x+1)^2}\int_1^x f(t)dt}=$$

$$=2x+\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=2x+x-1=3x-1$$

γ) Ισχύει $\int f'(x)dx=f(x)+c$ και $f'(x)=3x-1$ και $f(1)=0$

έχουμε $$\int f'(x)dx=\int (3x-1)dx$$

$$f(x)+c_1=\frac{3x^2}{2}-x+c_2 \qquad c_1,c_2\in R$$

$$f(x)=\frac{3x^2}{2}-x+c_2-c_1$$

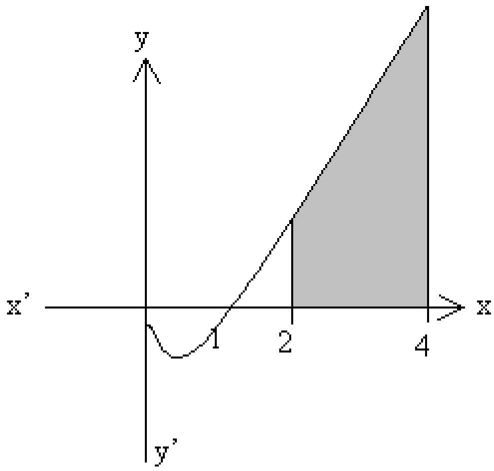
$$f(x)=\frac{3x^2}{2}-x+c \qquad c\in R$$

για $x=1$ έχουμε

$$f(1)=\frac{3}{2}-1+c\Leftrightarrow 0=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow\frac{-1}{2}$$

άρα $\quad f(x)=\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{2}, \quad x\in(0,+\infty)$

δ) $\quad E=\int_2^4 |f(x)|dx$



$$\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{2}=0$$

$\Delta=4$

$$x=\frac{1\pm 2}{3}=1 \text{ ή } -\frac{1}{3}$$

$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
+	−	+	

άρα στο $[2,4]$ η

f δίνει θετικές τιμές

$$E=\int_2^4\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4-\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4-\frac{1}{2}[x]_2^4=\frac{3}{2}\left(\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right)-\frac{1}{2}(4-2)=$$

$$=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{56}{\cancel{3}}-\frac{12}{2}-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}=28-6-1=27\tau\mu$$

Επιμέλεια:
Γιαννακουδάκη Αγγελική