ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Απαντήσεις

Θέμα 1ο

α) Θεωρία : σελ. 217

β) Θεωρία : σελ. 97 (Έστω Μ(x,y),…… $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ και σχήμα

γ) 1.Σ, 2.Σ, 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

Θέμα 2ο

α) Είναι $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{3+i}{1-3i}=\dfrac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{3+9i+i+3i^2}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{3+10i-3}{1+9}=\dfrac{10i}{10}=i$

και $|iz_1+z_2|^2=|i(3+i)+1-3i|^2=|3i+i^2+1-3i|^2=0^2=0$

ή <u>2ος τρόπος:</u>

$$|iz_1+z_2|^2=(iz_1+z_2)(\overline{iz_1+z_2})=(iz_1+z_2)(-i\overline{z_1}+\overline{z_2})=-i^2 z_1\overline{z_1}+iz_1\overline{z_2}-iz_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=$$
$$¿|z_1|^2+i(z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1})+|z_2|^2=\sqrt{3^2+1^2}^2+i[(3+i)(1+3i)-(1-3i)(3-i)]+\sqrt{1^2+(-3)^2}^2=$$
$$¿10+i(3+9i+i-3-3+i+9i+3)+10=20+i(20i)=20+20i^2=0$$

β)

$$z_1^{2006}+z_2^{2006}=(3+i)^{2006}+(1-3i)^{2006}=\left[(3+i)^2\right]^{1003}+\left[(1-3i)^2\right]^{1003}=$$
$$¿(9+6i+i^2)^{1003}+(1-6i+9i^2)^{1003}=(8+6i)^{1003}+(-8-6i)^{1003}=$$
$$¿(8+6i)^{1003}+\left[-(8+6i)\right]^{1003}=(8+6i)-(8+6i)^{1003}=0$$

γ)

Είναι :

$$w=\frac{k(3+i)-2(1-3i)}{1-3i-k(1-3i)}=\frac{3k+ki-i+3i^2}{(1-3i)(1-k)}=\frac{(3k-3)+(k-1)i}{(1-k)(1-3i)}=\frac{3(k-1)+(k-1)i}{(1-k)(1-3i)}=$$
$$¿\frac{(k-1)(3+i)}{(k-1)(1-3i)}=-\frac{z_1}{z_2}\overset{(a)}{=}-i$$

Άρα $I_m(w)=-1$

Θέμα 3º

$a+e^x, x\leq 0$
$x\ln x, x$
¿
¿
$f(x)=$¿{¿¿¿
¿

A) f συνεχής στο 0 αν και μόνον αν : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to o^+} f(x)=f(0)$

Είναι :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+e^x)=a+e^0=a+1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{dLH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-\frac{x^2}{x})=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

$$f(0)=a+e^0=a+1$$

άρα $\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha=-1$

B) Για $\alpha=-1$ είναι
$-1+e^x, x\leq 0$
$x\ln x, x$
¿
¿
$f(x)=$¿{¿¿¿
¿

i)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1+e^x-0}{x}\overset{dlH}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{(-1+e^x)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

ii) Για $x\langle 0: f'(x)=(-1+e^x)'=e^x\rangle 0$ άρα η $f\nearrow$ στο $(-\infty,0]$
x

Για ¿$0: f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=1\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$¿

$$\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

χ	$-\infty$	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

στο $(-\infty,0]$ η f $\nearrow$

στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ η f $\searrow$

στο $[\frac{1}{e},+\infty)$ η f $\nearrow$

iii) Είναι $f(x)=x\ln x\,,\, x\in[1,e]$ οπότε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$

άρα $E_{(\Omega)}=\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e (\frac{x^2}{2})'\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}(\ln x)'dx=$

$=\left[\frac{e^2\ln e}{2}-\frac{1^2\ln 1}{2}\right]-\int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=$

¿ $\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2})=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2e^2}{4}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}\tau.\mu.$

Θέμα 4ο

$f(x)=x-\ln x+e^x\,,\, x\in(1,+\infty)$

α) $f'(x)=1-\frac{1}{x}+e^x=\frac{x-1}{x}+e^x$ (γιατί x ¿ 1) ¿

¿ 0 ¿

άρα η f $\nearrow$ στο $(1,+\infty)$

β)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}(\frac{+\infty}{+\infty})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x+e^x)=\lim_{x\to+\infty}x(1-\frac{\ln x}{x}+\frac{e^x}{x})=(+\infty)(1-0+(+\infty))=+\infty$

γ) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x - \ln x + e^x) = 1 - \ln 1 + e = 1 + e$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

άρα $f(A) = (1+e, +\infty)$. γιατί $f\nearrow$

(σύνολο τιμών $f(A) = (\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x))$)

και 2005 ¿ $f(A)$ άρα η $f(x) = 2005$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, +\infty)$ που είναι και μοναδική γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα .

δ) άρα η $f\nearrow$ στο $(1, +\infty)$ άρα η f αντιστρέφεται

οπότε : $I = \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)\,dx$

θέτω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$

$dx = f'(u)\,du$

$x = f(2) : u = f^{-1}(f(2)) = 2$

$x = f(e) : u = f^{-1}(f(e)) = e$

άρα $I = \int_2^e u f'(u)\,du = [uf(u)]_2^e - \int_2^e u' f(u)\,du = ef(e) - 2\mathrm{f}(2) - \int_2^e f(x)\,fx =$

$= e(e - \ln e + e^e) - 2(2 - \ln 2 + e^2) - \int_2^e f(x)\,dx$

άρα Π $-2\ln 2 = \int_2^e f(x)\,dx + e(e - 1 + e^e) - 4 + 2\ln 2 - 2e^2 - \int_2^e f(x)\,dx - 2\ln 2 =$

$= e^2 - e + e^{e+1} - 4 + 2\ln 2 - 2e^2 - 2\ln 2 = e^{e+1} - e^2 - e - 4$