// Εξετάσεις Ομογενών 2006 //

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(ΘΕΜΑΤΑ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 10

β) Έστω μία συνάρτηση f και το σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

Μονάδες 2

2. Έστω η συνάρτηση f(x)=εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_1=R-{ x | συνx= 0 } και ισχύει $f'(x)=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Μονάδες 2

3. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

4. $\int \sigma\upsilon\nu x\, dx = \eta\mu x + c$.

Μονάδες 2

5. Αν για μία συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα [α,β] ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $(5z-1)^5 = (z-5)^5$

α) Να δείξετε ότι $|5z-1| = |z-5|$.

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι: $|z| = 1$.

Μονάδες 10

γ) Αν w=5z+1, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-5)+2x-12$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2006 έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f(x)=3+2\int_0^x f(t)\,dt$, $x\in R$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\Phi(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=3e^{2x}$.

Μονάδες 5

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ε(λ) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0, x=λ με λ>0 .

Μονάδες 10

δ) Να βρεθεί το $\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{E(\lambda)}{\lambda}$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α) Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελ.224)
β) Θεωρία (σχολικό βιβλίο σελ.188)
γ) 1. Σ, 2.Λ, 3.Σ, 4.Σ, 5.Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) $(5z-1)^5=(z-5)^5 \Leftrightarrow |(5z-1)^5|=|(z-5)^5| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |5z-1|^5=|z-5|^5 \Leftrightarrow |5z-1|=|z-5|$

β) $|5z-1|=|z-5| \Leftrightarrow$

$|5z-1|^2=|z-5|^2 \Leftrightarrow (5z-1)(5\bar{z}-1)=(z-5)(\bar{z}-5) \Leftrightarrow$

$25z\bar{z}-5z-5\bar{z}+1=z\bar{z}-5z-5\bar{z}+25 \Leftrightarrow$

$25|z|^2+1=|z|^2+25 \Leftrightarrow$

$24|z|^2=24 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

γ) $w=5z+1 \Leftrightarrow w-1=5z \Leftrightarrow z=\frac{w-1}{5}$

$|z|=\left|\frac{w-1}{5}\right| \Leftrightarrow 1=\frac{|w-1|}{5} \Leftrightarrow |w-1|=5 \Leftrightarrow$

$|w-(1+0i)|=5$

άρα ο Γ.Τ των εικόνων Μ (w) είναι κύκλος με Κ (1,0) και ρ=5.

ΘΕΜΑ 3ο

$f(x)=\ln(x-5)+2x-12$

α) $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$, Α$=(5,+\infty)$

β) $f'(x)=\frac{1}{x-5}(x-5)+2=\frac{1}{x-5}+2>0$ ΄ για κάθε $x \in A$

άρα η f γνησίως αύξουσα στο Α.

γ) η f συνεχής στο Α και f γνησίως αύξουσα άρα

$f(A)=(\lim_{x\to 5^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))$

• $\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}(\ln(x-5)+2x-12)$ (1)

$\lim_{x\to 5^+}\ln(x-5)=\lim_{u\to 0}\ln u=-\infty$

$x-5=u$ άρα η (1):

$\lim_{x\to 5^+} f(x)=(-\infty)+10-12=-\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(lu(x-5)+2x-12)$ (2)

$\lim_{x\to+\infty} lu(x-5)=\lim_{t\to+\infty} lut=+\infty$ αφού

$x-5=t$

και $\lim_{x\to+\infty}(2x-12)=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$

άρα η (2): $\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

άρα $f(A)=(-\infty,+\infty)=R$

δ) Επειδή $2006 \in f(A)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in A{:}f(x_0)=2006$, f γνησίως αύξουσα στο Α άρα το x_0

μοναδική ρίζα της $f(x)=2006$.

2ος Τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)\text{-}2006$

•g συνεχής στο $[6, 2007]$

•$g(6)=f(6)-2006=0-2006<0$

$g(2007)=f(2007)+2\cdot 2007-12$

$=lu(2002)+4014\text{-}12>0$

άρα θ.Β η $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\text{-}2006=0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(6,2007)$

και $g'(x)=f'(x)>0$ άρα γνησίως αύξουσα,

οπότε έχει μοναδική ρίζα.

ΘΕΜΑ 4ο

$f(x)=3+2\int_0^x l(t)dt$

α) Επειδή f συνεχής,

άρα η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη, οπότε η f παραγωγίσιμη

ως πράξεις με $f(x)=2f(x)$ (1)

είναι $\Phi'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)^{\prime}=\frac{f(x)e^{2x}-2f(x)e^{2x}}{(e^{2x})^2}=$

$=\frac{e^{2x}(f'(x)-2f'(x))}{(e^{2x})^2}\overset{(1)}{=}\frac{2f(x)-2f(x)}{e^{2x}}=0$ άρα

$\Phi(x)$ σταθερή, $\Phi(x)=C$

Β) Είναι $\Phi'(x)=C \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}}=C \Longrightarrow$

$f(x)=C\cdot e^{2x}$ (2)

για $x=0$: $f(0)=3+2\cdot\int_0^0 l(t)dt=3$

$\Phi(0)=\frac{f(0)}{e^0}=3$ άρα $C=3$

οπότε η (2): $f(x)=3e^{2x}$

γ) $f(x)=3e^{2x}>0$ για κάθε $x \in [o,\lambda]$ οπότε

$E(\lambda)=\int_0^\lambda 3e^{2x}dx=3\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0 =\frac{3}{2}(e^{2\lambda}-1)$

δ) $\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{E(\lambda)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}(e^{2\lambda}-1)}{\lambda}=$

$=\frac{3}{2}\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{(e^{2\lambda}-1)'}{(\lambda)'}=\frac{3}{2}\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{2e^{2\lambda}}{1}=\frac{3}{2}\cdot 2=3$