

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

A.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 10

β. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για τον μιγαδικό αριθμό $z = a + \beta i$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z = 0$ τότε και μόνον τότε, αν $a = 0$ και $\beta = 0$.

Μονάδες 2

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο A . Τότε πάντα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Μονάδες 2

3. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 2

4. Αν είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

5. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

- A.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = k + (k + 1)i$, $k \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y = x + 1$.

Μονάδες 6

- β.** Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$;

Μονάδες 9

- B.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1 - i)^4\beta - (1 + i)^4\alpha$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$, $x > 0$.

- α.** Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

- β.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

- γ.** Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_1^{e^2} f(x)dx.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $(0, f(0))$ της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = x$ και $y = 1$.

Μονάδες 10

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα $\eta\mu x > x - \frac{3}{2}x^2$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Για την κατασκευή των σχημάτων σε θέματα που απαιτείται, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών και όχι πριν την 17.00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ