

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 26 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέτουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB .

Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

Μονάδες 15

B. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**B.1**, **B.2**, **B.3** και **B.4**) και, δίπλα ακριβώς, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, παριστάνει πάντοτε ευθεία γραμμή του επιπέδου.
2. Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

Αν $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

3. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O η εξίσωση $x^2 = 2py$ με $p \neq 0$ παριστάνει παραβολή, με κορυφή το σημείο O .

4. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2\mu + 1, \lambda - 2)$, $\Gamma(4, 0)$ και $M(3, 2)$, όπου M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

Μονάδες 10

- β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\Gamma M}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 10

- γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $|\vec{\Gamma A}| = |\vec{\Gamma B}|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 5, \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

Μονάδες 10

- β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1).

Μονάδες 6

- γ) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με εξίσωση $y = x$ και του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς- Ηράκλειο Κρήτης. Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδιού η θέση M του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι: $M(2 + \kappa t, \lambda + 2t)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τη χρονική στιγμή $t = 5$ το πλοίο διέρχεται από το σημείο $A(7, 13)$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ .

Μονάδες 7

- β) Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x - 1$.

Μονάδες 10

- γ) Ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1 κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

Μονάδες 8

ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ