ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

3-7-2008

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο ΘΕΜΑ

Α.1) Θεωρία σελίδα 334-335 σχολικού βιβλίου

Α.2) Θεωρία σελίδα 247 σχολικού βιβλίου

Β. α. Σ (σελ. 153)
β. Λ (σελ. 274)
γ. Σ (σελ. 346)
δ. Λ (σελ.87)
ε. Σ (σελ. 161)

2ο ΘΕΜΑ

α) • Αφού η $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ η μία ρίζα της εξίσωσης, τότε η $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ η άλλη ρίζα της εξίσωσης.

• Ισχύει

$$z_1 + z_2 = -\beta$$
$$z_1 + \bar{z}_1 = -\beta$$
$$2\mathrm{Re}(z_1) = -\beta$$
$$2 \cdot \frac{1}{2} = -\beta$$
$$\beta = -1$$

• Ισχύει

$$z_1 \cdot z_2 = \gamma$$
$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = \gamma$$
$$\mathrm{Re}^2(z_1) + \mathrm{Im}^2(z_1) = \gamma$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \gamma$$
$$\gamma = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$
$$\gamma = 1$$

β) 1ος τρόπος

$$z_1^3=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$=\frac{1}{8}(1+i\sqrt{3})^3$$
$$=\frac{1}{8}[1^3+3\cdot 1^2\cdot i\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot (i\sqrt{3})^2+(i\sqrt{3})^3]$$
$$=\frac{1}{8}(1+3\cdot i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3})$$
$$=\frac{1}{8}(-8)$$
$$=-1$$

2ος τρόπος

Ισχύει $z_1^2-z_1+1=0\Rightarrow z_1(z_1-1)=-1$ (1)

Επίσης ισχύει $z_1^2-z_1+1=0\Rightarrow z_1-1=z_1^2$ (2)

Έχουμε λοιπόν: (1) $\xrightarrow{(2)}$ $z_1\cdot z_1^2=-1\Rightarrow z_1^3=-1$

γ)

$$|w|=|z_1-\bar{z}_1|$$
$$|w|=|2\,\mathrm{Im}(z_1)i|$$
$$|w|=|2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i|$$
$$|w|=|\sqrt{3}i|$$
$$|w|=\sqrt{3}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα $\sqrt{3}$

3^o ΘΕΜΑ

α) • $f'(x)=2x-\frac{2}{x}$ $x>0$

- $f'(x)=0$

$2x-\frac{2}{x}=0$

$2x^2-2=0$

$x^2=1$

$x=1 \quad (x>0)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

ολ. ελάχιστο

- Παρατηρώ ότι για x=1 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το
$f(1)=1^2-2\cdot\ln 1=1$, οπότε ισχύει
$f(x)\geq f(1)$ για κάθε x>0

Δηλαδή $f(x)\geq 1$ για κάθε x>0

β)

- ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-2\ln x\right)=0-2(-\infty)=+\infty$

Οπότε η ευθεία x=0 είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

- ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ-ΠΛΑΓΙΕΣ

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\frac{\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{*}{=}+\infty-2\cdot 0=+\infty$

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\underset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Άρα η γραφική παράσταση της f ΔΕΝ έχει πλάγιες (ούτε οριζόντιες) ασύμπτωτες.

γ)

i.• Για x>0 η g συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
(η f συνεχής ως πράξεις συνεχών)

- Για x = 0 για να είναι η g συνεχής, πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=g(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{f(x)}=\kappa$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^2-2\ln x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{2x^2-2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2x^2-2}=-\dfrac{1}{2}$

Άρα $\kappa=-\dfrac{1}{2}$

ιι. Για $\kappa=-\dfrac{1}{2}$ η g γίνεται $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x^2-2\ln x}, & x>0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

- Η g συνεχής στο $[0,e]\subseteq[0,+\infty)$
- $g(0)=-\dfrac{1}{2}<0$
  $g(e)=\dfrac{\ln e}{e^2-2\ln e}=\dfrac{1}{e^2-2}>0$

Οπότε $g(0)\cdot g(e)<0$

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,e)

4^{o} ΘΕΜΑ

α) Έχουμε :

$\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt=$

$=\int_0^1[e^{t-1}f(t)+e^{t-1}F(t)]dt$

$=\int_0^1[F'(t)e^{t-1}+F(t)(e^{t-1})']dt$

$=\int_0^1[F(t)e^{t-1}]'dt$

$=[F(t)e^{t-1}]_0^1$

$=F(1)\cdot e^{1-1}-F(0)\cdot e^{0-1}$

$=F(1)\cdot 1-F(0)\cdot\dfrac{1}{e}$

$=F(1)-0\cdot\dfrac{1}{e}\quad [F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0]$

$=F(1)$

β) • Για $x>0$ έχουμε:

$$h'(x)=\frac{F'(x)\cdot\int_o^x tf(t)dt-F(x)\cdot\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{\left(\int_o^x tf(t)dt\right)^2}$$

$$h'(x)=\frac{f(x)\cdot\int_o^x tf(t)dt-F(x)\cdot xf(x)}{\left(\int_o^x tf(t)dt\right)^2}$$

$$h'(x)=\frac{f(x)\cdot\left[\int_o^x tf(t)dt-xF(x)\right]}{\left(\int_o^x tf(t)dt\right)^2}$$

- Από την υπόθεση $f(x)>0$ (1) και προφανώς $\left[\int_o^x tf(t)dt\right]^2>0$ (2)
- Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\int_o^x tf(t)dt-xF(x)<0$

Έστω συνάρτηση g με $g(x)=\int_o^x tf(t)dt-xF(x),\quad x\geq 0$

Ισχύει : $g'(x)=\left[\int_o^x tf(t)dt-xF(x)\right]'$

$$g'(x)=xf(x)-F(x)-xF'(x)$$
$$g'(x)=xf(x)-F(x)-xf(x)$$
$$g'(x)=-F(x)$$

Ομοίως $f(x)>0$ οπότε και $F(x)=\int_o^x f(t)dt>0,$ για κάθε $x>0$ οπότε $g'(x)<0$ και επειδή η g συνεχής, θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

- Έχουμε λοιπόν για $x>0$

  $g(x)<g(0)$ [g: γνησίως φθίνουσα]

  $\int_o^x tf(t)dt-xF(x)<0$ (3)

Από (1), (2) και (3) $h'(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής θα είναι και γνησίως φθίνουσα.

γ) i)

$2>1$

$h(2)<h(1)$ [Η h γνησίως φθίνουσα]

$$\frac{F(2)}{\int_o^2 tf(t)dt} < 2$$

$$\frac{\int_o^2 f(t)dt}{\int_o^2 tf(t)dt} < 2$$

$$\int_o^2 tf(t)dt \cdot \frac{\int_o^2 f(t)dt}{\int_o^2 tf(t)dt} < 2 \cdot \int_o^2 tf(t)dt \qquad \left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \ \ \textit{οπότε} \\ \int_o^2 tf(t)dt > 0 \end{array}\right]$$

$$\int_o^2 f(t)dt < 2\int_o^2 tf(t)dt$$

ii)

- $h(1) = 2$

$$\frac{F(1)}{\int_o^1 tf(t)dt} = 2$$

$$\int_o^1 tf(t)dt = \frac{F(1)}{2} \quad (4)$$

- $\int_o^1 F(t)dt = \int_o^1 (t)' F(t)dt = [t \cdot F(t)]_o^1 - \int_o^1 tF'(t)dt = F(1) - \int_o^1 tf(t)dt \overset{(4)}{=} F(1) - \frac{F(1)}{2} = \frac{F(1)}{2}$