

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Σχολικό βιβλίο, σελ. 98

A.2 Σχολικό βιβλίο, σελ. 141

A.3 Σχολικό βιβλίο, σελ. 280

B. $\alpha \rightarrow \Lambda$ $\beta \rightarrow \Lambda$ $\gamma \rightarrow \Lambda$ $\delta \rightarrow \Sigma$ $\varepsilon \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2^ο

a. $|z| = \sqrt{\frac{2+ai}{a+2i}} = \sqrt{\frac{|2+ai|}{|a+2i|}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2^2+a^2}}{\sqrt{a^2+2^2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{a^2+4}}} = 1$

Έχουμε $|z|=1$. Αρα η εικόνα του μηγάδικού z ανήκει στον μοναδικό κύκλο.

b. I. Για $a=0$ έχουμε $z_1 = \frac{2+0i}{0+2i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

Για $a=2$ έχουμε $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$. Η απόσταση των εικόνων των z_1 και z_2 είναι:

$$|z_1 - z_2| = |-i - 1| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

II. $(z_1)^{2i} = (-i)^{2i} = [(-i)^2]^i = (-1)^i$ και $(-z_2)^i = (-1)^i$ Άρα $(z_1)^{2i} = (-z_2)^i$

ΘΕΜΑ 3^ο

$f(x) = x^3 - 3x - 2\mu^2\theta$ όπου $x, \theta \in \mathbb{R}$ με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

a. f παραγωγίσμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	-∞	-1	1	+∞
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$				

$f(-1)$
T.M.
 $f(1)$
T.E.

Άρα το $f(-1) = 2 - 2\mu^2\theta$ τοπικό μέγιστο και το $f(1) = -2 - 2\mu^2\theta$ τοπικό ελάχιστο της f .

H f' είναι παραγωγίσμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική.

$$f''(x) = 6x \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	-∞	0	+∞
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Σ.Κ.

Άρα το $A(0, f(0))$ με $f(0) = -2\mu^2\theta$ σημείο κομπής της γραφικής παρέστασης της f .

b. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ και $f(-1) = 2 - 2\mu^2\theta = 2(1 - \mu^2\theta) = 2\sin^2\theta > 0$

$$\forall \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

H f είναι συνεχής και γνησιώς αθέοσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$ και έχει σύνολο τιμών $f(A_1) = (-\infty, 2\sin^2\theta]$.

To $0 \in f(A_1)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο A_1 .

$$\text{Είναι } f(1) = -2 - 2\mu^2\theta = -2(1 + \mu^2\theta) < 0 \quad \forall \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

H f είναι συνεχής και γνησιώς φθίνοσα στο $A_2 = [-1, 1]$ και έχει σύνολο τιμών $f(A_2) = [-2(1 + \mu^2\theta), 2\sin^2\theta]$.

To $0 \in f(A_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο A_2 .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 2\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

H f είναι συνεχής και γνησιώς αθέοσα στο $A_3 = [1, \infty)$ και έχει σύνολο τιμών $f(A_3) = [-2(1 + \mu^2\theta), +\infty)$

Το $0 \in f(A_3)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο A_3 .

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες.

- γ. Για $x = -1$ τότε $y = 2 - 2\eta\mu^2\theta = f(-1)$ άρα το σημείο $A(-1, f(-1))$ επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας άρα είναι και σημείο της. Για $x = 1$ τότε $y = -2 - 2\eta\mu^2\theta = f(1)$ άρα το σημείο $B(1, f(1))$ επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας άρα είναι και σημείο της. Για $x = 0$ τότε $y = -2\eta\mu^2\theta = f(0)$ άρα το σημείο $\Gamma(0, f(0))$ επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας άρα είναι και σημείο της.

- δ. Εστω $g(x) = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ με $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta, x \in \mathbb{R}$ με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$. Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της h . Έχουμε $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$. Είναι $h(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) > 0$. Το πρόσημο της h φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
x	-	-	0	+	+		
$x^2 - 1$	+	0	-	-	0	+	
$h(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Από τον παραπάνω πίνακα το ζητούμενο εμβολόν $E(\Omega) = \int_{-1}^0 |h(x)|dx + \int_0^1 |h(x)|dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x)dx + \int_0^1 (-x^3 + x)dx =$
 $= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 0 \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Την.

ΘΕΜΑ 4^o

- α' Λέση: Η $f \cdot g$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως γινόμενο συνεχών άρα η F παραγωγίζεται στο $[0, 1]$ με $F'(x) = f(x)g(x) \quad \forall x > 0$ η f είναι γνήσια ανέσυρσα άρα $f(x) > f(0) > 0$ άρα $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ άρα η $F'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ άρα η F είναι γνήσια ανέσυρσα στο $[0, 1]$ οπότε $\forall x > 0$ έχουμε $F(x) > F(0) \Leftrightarrow F(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$.

- β' Λέση: Η f είναι γνήσια ανέσυρσα στο $(0, 1]$ άρα $\forall x \geq 0$ έχουμε $f(x) \geq f(0) > 0$ άρα $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ άρα $f(t)g(t) > 0$ τότε $F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt > 0 \quad \forall x \in (0, 1]$.

- β. $\forall t, x \in (0, 1]$ με $t < x$ έχουμε f γνήσια ανέσυρσα άρα $f(t) < f(x) \Leftrightarrow g(t)f(t) < f(x)g(t) \Leftrightarrow f(x)g(t) - g(t)f(t) > 0$ άρα $\int_t^x (f(x)g(t) - g(t)f(t))dt > 0 \Leftrightarrow \int_t^x f(x)g(t)dt - \int_t^x g(t)f(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_t^x f(x)g(t)dt > \int_t^x g(t)f(t)dt \Leftrightarrow \Leftrightarrow f(x) \int_t^x g(t)dt > F(x) \Leftrightarrow f(x)G(x) > F(x)$.

- γ. Από β. έχουμε $G(x) > \frac{F(x)}{f(x)} > 0$ και $f(x)G(x) > F(x) \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} g(x)f(x)G(x) > F(x)g(x) \Leftrightarrow F'(x)G(x) > F(x)G'(x) \Leftrightarrow F'(x)G(x) - F(x)G'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{G(x) > 0}{G^2(x)} \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{F(x)}{G(x)} \right)' > 0$ άρα η $\frac{F}{G}$ γνησιώς ανέσυρσα στο $(0, 1]$ $\forall x \in (0, 1]$ οπότε $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$.

- δ. Έχουμε $\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^z f(t)g(t)dt}{\int_0^z g(t)dt} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} \stackrel{(0)}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ γιατί η f είναι συνεχής και

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{z^2} \eta\mu t^2 dt}{x^2} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^{z^2} \eta\mu t^2 dt \right)'}{\left(x^2 \right)'} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu z^4 \cdot 2z}{5x^4}, \text{ Όμως } \lim_{z \rightarrow 0^+, u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu z^4}{5x^4} = \lim_{z \rightarrow 0^+, u \rightarrow 0^+} \frac{1}{5} \frac{\eta\mu u}{u} = \frac{1}{5} \text{ και } \lim_{z \rightarrow 0^+} 2z = 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu z^4 \cdot 2z}{5x^4} = 0 \text{ τότε } \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^z f(t)g(t)dt \right) \left(\int_0^{z^2} \eta\mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^z g(t)dt \right) x^2} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^z f(t)g(t)dt}{\int_0^z g(t)dt} \cdot \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{z^2} \eta\mu t^2 dt}{x^2} = f(0) \cdot 0 = 0.$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΣΤΟΡΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ • ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΓΙΑΝΝΗΣ ΦΟΥΚΑΚΗΣ

ΓΙΑΝΝΗΣ ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΑΗ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΦΑΡΣΑΡΗΣ