ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Μαθηματικά

Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

2007

ΘΕΜΑ 1ο A_1. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ 217 ΣΕΛΙΔΑ.

A_2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ 246 ΣΕΛΙΔΑ.

Β. $\alpha \longrightarrow Λ$, $\beta \longrightarrow Λ$, $\gamma \longrightarrow Σ$, $\delta \longrightarrow Σ$, $\varepsilon \longrightarrow Λ$.

ΘΕΜΑ 2ο α. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ημ3x}{x} = 3$.

β. $f'(x) = (x^2+\alpha x+\beta συνx)' = 2x+\alpha-\beta ημx$. $x>0$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Leftrightarrow 2\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\, ημ\frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow \alpha-\beta=0$

$\alpha=\beta$ (1). Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \beta = 3 \xRightarrow{(1)} \alpha=\beta=$

γ. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (x^2+3x+3συνx)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+3ημx\right]_0^{\pi} =$

$= \dfrac{\pi^3}{3} + 3\dfrac{\pi^2}{2}$

ΘΕΜΑ 3ο α. $f'(x) = (e^x - e\ln x)' = e^x - \frac{e}{x} = \frac{xe^x - e}{x}$ (1)

Θέτω $\varphi(x) = xe^x - e$, $\varphi'(x) = e^x + xe^x > 0$ άρα $\varphi \uparrow$
για $x > 1$ οπότε $\varphi(x) > \varphi(1) \Rightarrow xe^x - e > 1e^1 - e = 0 \Rightarrow$
$xe^x - e > 0$ άρα (1) $\Rightarrow f'(x) > 0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

β. Αν $0 < x < 1 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(1) \Rightarrow xe^x - e < 0$ άρα
$f'(x) < 0$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	ελαχ.	$\nearrow$	

$f(1) = e$

ισχύει $f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq e^1 - e\ln 1$

$f(x) \geq e \quad \forall\, x > 0$.

γ. Προφανής ρίζα το $x = 1$.
Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)\,dt - \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)\,dt - \int_2^4 f(t)\,dt$
στο $(0, +\infty)$ τότε $h(x) = \int_{x^2+1}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{x^2+2} f(t)\,dt - \int_{x^2+3}^{c} f(t)\,dt - \int_{c}^{x^2+2} f(t)\,dt -$
$- \int_2^4 f(t)\,dt$ άρα $h(x) = -\int_c^{x^2+1} f(t)\,dt + \int_c^{x^2+2} f(t)\,dt + \int_c^{x^2+3} f(t)\,dt - \int_c^{x^2+2} f(t)\,dt$
$- \int_2^4 f(t)\,dt$. Η $h'(x) = -f(x^2+1)\cdot 2x + \cancel{f(x^2+2)\cdot 2x} + f(x^2+3)\cdot 2x - \cancel{f(x^2+2)\cdot 2x}$

η $h'(x) = 2x\,[f(x^2+3) - f(x^2+1)]$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{το } x^2+3 > x^2+1 > 1 \\ \qquad x > 0 \\ \text{και η } f \uparrow \text{ στο } (1, +\infty) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{άρα } f(x^2+3) > f(x^2+1) \\ f(x^2+3) - f(x^2+1) > 0 \ (3) \end{array}$$

οπότε $\overset{(2)(3)}{}$ $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

άρα η ρίζα $x = 1$ μοναδική.

ΘΕΜΑ 4ο α. $z_1 = \alpha + \beta i$ $\quad \overline{z}_1 = \alpha - \beta i$ με $\beta \neq 0$.

$$z_2 = \frac{2-\overline{z}_1}{2+\overline{z}_1} = \frac{2-\alpha+\beta i}{2+\alpha-\beta i} = \frac{(2-\alpha+\beta i)(2+\alpha+\beta i)}{(2+\alpha-\beta i)(2+\alpha+\beta i)} = \ldots$$

$$= \frac{4-\alpha^2-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{4\beta i}{(2+\alpha)^2+\beta^2} \quad (1)$$

$$z_2 - z_1 = \left[\frac{4-\alpha^2-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - \alpha\right] + \left[\frac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - \beta\right] i \quad (2)$$

$z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$ $\quad$ άρα $\left[\frac{4}{(2+\alpha)^2+\beta^2} - 1\right]\beta = 0$ $\quad \beta \neq$

$$\Rightarrow (2+\alpha)^2 + \beta^2 = 4 \quad (3)$$

από την (2) λόγω της (3) προκύπτει

$$z_2 - z_1 = \frac{(2+\alpha)^2+\beta^2-\alpha^2-\beta^2}{4} - \alpha = \frac{4+4\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{\beta^2}-\cancel{\alpha^2}-\cancel{\beta^2}}{4} - \alpha$$

$$= \frac{4+\cancel{4\alpha}-\cancel{4\alpha}}{4} = 1 \quad \text{δηλ.} \quad \boxed{z_2 - z_1 = 1}$$

β. Ο γ. τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος $C: (\alpha+2)^2 + \beta^2 = 4$ $\quad K(-2,0)$, $\rho = 2$, χωρίς τα σημεία $(0,0)$ και $(-4,0)$, γιατί $\beta \neq 0$.

γ. $z_1 = \alpha + \beta i$, $\quad z_1^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i \in I \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0$

άρα $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ $\quad$ άρα $\alpha = \beta$ αφού $\alpha\beta > 0$

$\alpha = \beta$ από (3) $\quad \alpha^2 + 4\alpha + \cancel{4} + \alpha^2 = \cancel{4} \Rightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha(\alpha+2) = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = -2 = \beta$$

οπότε $z_1 = -2-2i$, $\overline{z}_1 = -2+2i$

$$(z_1+1+i)^{20} - (\overline{z}_1+1-i)^{20} = (-2-2i+1+i)^{20} - (-2+2i+1-i)^{20}$$

$$= (-1-i)^{20} - (-1+i)^{20} = (1+i)^{20} - (1-i)^{20} = [(1+i)^2]^{10} - [(1-i)^2]^{10} =$$

$$= (2i)^{10} - (-2i)^{10} = 0.$$