ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 225
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 150
Α4. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό,
δ. Σωστό, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Τα z_1, z_2 είναι ρίζες τις εξίσωσης $z^2 - Sz + P = 0$,
με $S = z_1 + z_2 = -2$ και $P = z_1 \cdot z_2 = 5$
Η εξίσωση $z^2 + 2z + 5 = 0$ έχει διακρίνουσα -16
και ρίζες $z_1 = -1 + 2i$ και $z_2 = -1 - 2i$.

Β2. $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \overset{w = x + yi}{\Leftrightarrow}$

$$|x + yi + 1 - 2i|^2 + |x + yi + 1 + 2i|^2 = |-1 + 2i + 1 + 2i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}\right)^2 = |4i|^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \cancel{- 4y} + 4 + x^2 + 2x + 1 + y^2 + \cancel{4y} + 4 = 4^2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος C με κέντρο $K(-1\ ,0)$, ακτίνα $\rho = 4$ και εξίσωση $(x + 1)^2 + y^2 = 4$.

Β3. Είναι $2Re(w) + Im(w) = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$ (1)

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x + 1 + (-2x)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = \frac{3}{5}.$$

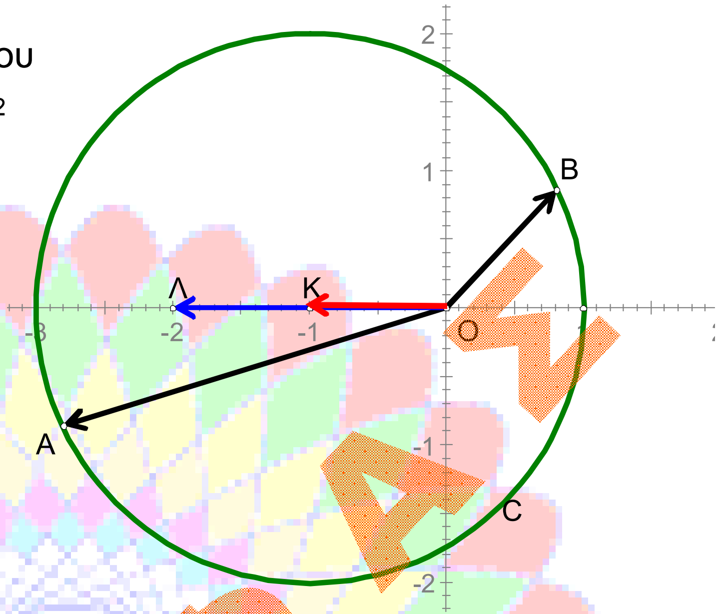
- Για $x = -1$ από την (1) προκύπτει $y = 2$, άρα $w = -1 + 2i = z_1$
- Για $x = \frac{3}{5}$ από την (1) προκύπτει $y = -\frac{6}{5}$, άρα $w = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$

B4. Αν A, B είναι οι εικόνες των w_1 και w_2 αντίστοιχα, τότε

$|w_1 - w_2| = (AB) =$ μήκος χορδής του κύκλου C

Είναι $|w_1 - w_2| = 4 = 2\rho$, άρα η AB είναι διάμετρος του κύκλου C και το K μέσο του AB

1η λύση



Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των w_1, w_2 ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους, άρα

Αν Λ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w_1 + w_2$ τότε

$$\vec{O\Lambda} = \vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{O\Lambda} = 2\vec{OK} = (-2, 0)$$

άρα $\Lambda(-2, 0)$ και

$w_1 + w_2 = -2$ και

$|w_1 + w_2| = |-2| = 2$

2η λύση

Αν $w_1 = \alpha + \beta i$ και $w_2 = \gamma + \delta i$, τότε $A(\alpha, \beta)$ και $B(\gamma, \delta)$.

Επίσης $w_1 + w_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$

Το $K(-1, 0)$ είναι το μέσο του AB, άρα

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow -1 = \dfrac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow \alpha + \gamma = -2 \\[2ex] y_K = \dfrac{\beta+\delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{\beta+\delta}{2} \Leftrightarrow \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Επομένως $w_1 + w_2 = -2$ και $|w_1 + w_2| = |-2| = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x-2)\ell nx + x - 3\right] = +\infty$

άρα **η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ (y΄y)**

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[(x-2)\ell nx + x - 3\right] = +\infty$

άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες

• $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x-2)\ell nx + x - 3}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x-2}{x}\ell nx + 1 - \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$

άρα η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Γ2. $f'(x) = \ell n x + \dfrac{x-2}{x} + 1 = \ell n x + 2 - \dfrac{2}{x}$, $x > 0$

$f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} > 0$, για $x > 0$, άρα η f' είναι γν.αύξουσα στο $(0\ ,\ +\infty)$

- $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$,
  άρα η **f είναι γν. φθίνουσα στο $(0\ ,1)$**
- $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$,
  άρα η **f είναι γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$**

Γ3. • Στο $\Delta_1 = (0\ ,\ 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} f(1) = -2$

άρα $f(\Delta_1) = (-2\ ,\ +\infty)$ και επειδή $0 \in f(\Delta_1)$

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο Δ_1

• Στο $\Delta_2 = [1\ ,\ +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

Είναι $f(1) = -2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

άρα $f(\Delta_2) = [-2\ ,\ +\infty)$ και επειδή $0 \in f(\Delta_2)$

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο Δ_2

Άρα **η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες**.

Γ4. Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ με $x_1 < 1 < x_2$.

1η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$.

- η h είναι συνεχής στο $[x_1\ ,\ x_2]$
- η h είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1\ ,\ x_2)$ με $h'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$
- $h(x_1) = h(x_2) = 0$

από Θ. Rolle προκύπτει ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1\ ,\ x_2)$, τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ **(1)**

2η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x \cdot f'(x) - f(x)$, $x > 0$

- η γ είναι συνεχής στο $[x_1\ ,\ x_2]$, ως πράξεις συνεχών
- $g(x_1) = x_1 f'(x_1) - f(x_1) = x_1 f'(x_1) < 0$, διότι $x_1 > 0$ και $f'(x_1) < 0$
- $g(x_2) = x_2 f'(x_2) - f(x_2) = x_2 f'(x_2) > 0$, διότι $x_2 > 0$ και $f'(x_2) > 0$

από Θ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (x_1\ ,\ x_2)$, τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ **(1)**

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι :
$(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi)$
Για να διέρχεται η (ε) από την αρχή των αξόνων αρκεί οι συντεταγμένες του Ο να επαληθεύουν την εξίσωση της (ε), δηλαδή $0 - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (0 - \xi) \Leftrightarrow - f(\xi) = - \xi f'(\xi) \Leftrightarrow$
$\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ που ισχύει από τη σχέση (1).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι κυρτή στο IR, άρα η f΄ είναι γν. αύξουσα στο IR.

- $x < 0 \overset{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$,
  άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$
- $x > 0 \overset{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$,
  άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 1$, άρα **$f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in$ IR**.

Δ2. $$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\int_0^1 f(xt)xdt}{x^3} + \frac{x^3}{x^3}}{\frac{\eta\mu^3 x}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\int_0^x f(u)du}{x^3} + 1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3} = +\infty$$

διότι • $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 = 1^3 = 1$ και

• $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^3} \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{1}{3x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0} f(x)\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2} \overset{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1}{=} +\infty$$

Δ3. 1η λύση

$$f'(x) + 2x = 2x\cdot\left[f(x) + x^2\right] \overset{f(x)\geq 1}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x) + 2x}{f(x) + x^2} = 2x \Leftrightarrow$$

$$\left(\ell n\left[f(x) + x^2\right]\right)' = (x^2)' \overset{\text{συνέπειες ΘΜΤ}}{\Rightarrow} \ell n\left[f(x) + x^2\right] = x^2 + c$$

Για $x = 0$ έχουμε $\ell n f(0) = c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $\ell n\left[f(x) + x^2\right] = x^2 \Leftrightarrow f(x) + x^2 = e^{x^2} \Leftrightarrow$

$f(x) = e^{x^2} - x^2$

$2^{η}$ λύση

$f'(x) + 2x = 2x \cdot \left[f(x) + x^2\right] \Leftrightarrow f'(x) - 2x \cdot f(x) = -2x + 2x^3 \Leftrightarrow$

$f'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot f(x) \cdot e^{-x^2} = -2x \cdot e^{-x^2} + 2x^3 \cdot e^{-x^2} \Leftrightarrow$

$f'(x) \cdot e^{-x^2} + f(x) \cdot \left(e^{-x^2}\right)' = (-x^2)' \cdot e^{-x^2} + (-x^2) \cdot \left(e^{-x^2}\right)' \Leftrightarrow$

$\left(f(x) \cdot e^{-x^2}\right)' = \left(-x^2 \cdot e^{-x^2}\right)' \overset{\text{συνέπειες ΘΜΤ}}{\Rightarrow} f(x) \cdot e^{-x^2} = -x^2 \cdot e^{-x^2} + c$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) \cdot e^0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα $f(x) \cdot e^{-x^2} = -x^2 \cdot e^{-x^2} + 1 \overset{\cdot e^{x^2}}{\Leftrightarrow} f(x) = -x^2 + e^{x^2}$ ή $\mathbf{f(x) = e^{x^2} - x^2}$

Δ4. *$1^{η}$ λύση*

$h'(x) = f(x + 2) - f(x),\ x \geq 0$

$h''(x) = f'(x + 2) - f'(x) > 0$

διότι η f' είναι γν. αύξουσα στο IR και $x + 2 > x$

άρα η h' είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$h'(0) = f(2) - f(0) = e^4 - 5 > 0$

$x \geq 0 \overset{h'\uparrow}{\Rightarrow} h'(x) \geq h'(0)$ άρα $h'(x) > 0$,

άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$2^{η}$ λύση

$h'(x) = f(x + 2) - f(x),\ x \geq 0$

$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x \cdot (e^{x^2} - 1) > 0$, για $x > 0$

άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Είναι $x + 2 > x \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x + 2) > f(x) \Leftrightarrow h'(x) > 0$,

άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Η ανίσωση γίνεται

$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)\,dt < \int_4^6 f(t)\,dt \Leftrightarrow h(x^2+2x+1) < h(4)$

Είναι $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ και $4 > 0$

και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

έχουμε $x^2 + 2x + 1 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow \mathbf{-3 < x < 1}$