ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

Α3. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. • η f είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$
• $f(\alpha) = 5\beta > 0$ και $f(\beta) = 5\alpha < 0$
από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α , β).

Β2. Είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{5}$, άρα για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi , f(\xi))$ κάθετη στην ευθεία (ε), αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -5$.

1η λύση

• η f είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$
• η f είναι παραγωγίσιμη στο (α , β)
από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{5\alpha - 5\beta}{\beta - \alpha} = \frac{-5(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = -5$$

2η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) + 5x$.
• η h είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$, ως άθροισμα συνεχών
• η h είναι παραγωγίσιμη στο (α , β), με $h'(x) = f'(x) + 5$
• $h(\alpha) = f(\alpha) + 5\alpha = 5\alpha + 5\beta$
$h(\beta) = f(\beta) + 5\beta = 5\alpha + 5\beta$
από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε
$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 5 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -5$.

Β3. ***1η λύση***

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$
- $f(\beta) = 5\alpha < \frac{5}{2}(\alpha + \beta) < 5\beta = f(\alpha)$, διότι $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$.

2η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$
- $g(\alpha) = f(\alpha) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = 5\beta - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = \frac{5}{2}(\beta - \alpha) > 0$

$g(\beta) = f(\beta) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = 5\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = \frac{5}{2}(\alpha - \beta) > 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε

$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $z_2 = \overline{z_1}$.

$z_1 z_2 = \frac{\gamma}{1} = \gamma$ και $z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 5^2 = 25$, άρα **γ = 25**.

Γ2. Η εξίσωση γίνεται : $z^2 - 6z + 25 = 0$

$\Delta = -64$ και $z_{1,2} = \frac{6 \pm i\sqrt{64}}{2} = 3 \pm 4i$

και επειδή $Im(z_1) > 0$ θα είναι $\mathbf{z_1 = 3 + 4i}$ και $\mathbf{z_2 = 3 - 4i}$.

Γ3. $|w - z_1| = |w - z_2| \overset{w = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 3 - 4i| = |x + yi - 3 + 4i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{(x - 3)^2} + (y - 4)^2 = \cancel{(x - 3)^2} + (y + 4)^2 \Leftrightarrow$

$y^2 - 8y + 16 = y^2 + 8y + 16 \Leftrightarrow -16y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{w \in IR}$

Γ4. $(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8 = (3 + 4i - 2 - 3i)^8 + (3 - 4i - 4 + 5i)^8$

$= (1 + i)^8 + (-1 + i)^8$

$= \left[(1 + i)^2\right]^4 + \left[(-1 + i)^2\right]^4$

$= (2i)^4 + (-2i)^4 = 16 + 16 = \mathbf{32}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει και αρκεί $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

Άρα $\mathbf{D_f = [-3\,,3]}$

Δ2. α. Για $x \in (-3\,,3)$ είναι :

$$f'(x) = (x+3)' \cdot \sqrt{9-x^2} + (x+3) \cdot \left(\sqrt{9-x^2}\right)'$$

$$= \sqrt{9-x^2} + (x+3)\frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{9-x^2} + (x+3)\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{-x(x+3)}{\sqrt{9-x^2}} = \mathbf{\frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}}}$$

β. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x-(-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)\sqrt{9-x^2}}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt{9-x^2} = \mathbf{0}$

άρα $\mathbf{f'(-3) = 0.}$

Δ3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = \dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$ -3		$\frac{3}{2}$		3 $+\infty$
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$		↗		↘	
		τ. ελάχιστο	τ. μέγιστο		τ. ελάχιστο

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-3\,,\frac{3}{2}\right]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{2}\,,3\right]$

Δ4. τοπικό ελάχιστο : f (-3) = 0

τοπικό μέγιστο : $\mathbf{f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}+3\right)\sqrt{9-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}}$

τοπικό ελάχιστο : f (3) = 0